Exercice n° 2

Soit la conduite en charge de forme trapézoïdale représentée par la figure 1. Elle écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν, sous un gradient de la perte de charge linéaire J. Sa paroi interne est considérée comme étant pratiquement lisse ($\varepsilon \to 0$). La conduite est définie par ses dimensions linéaires horizontales a et b, par sa dimension verticale Y ainsi que par l'angle d'inclinaison α de sa paroi latérale par rapport à l'horizontale.
Les relations théoriques régissant l'écoulement dans la conduite considérée ont été présentées au cours de l'exercice n°1 (fichier à télécharger).

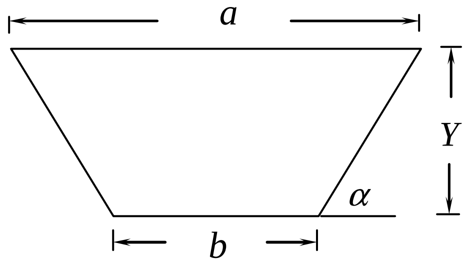

Figure 1 : Schéma de définition de la conduite en charge de forme trapézoïdale

a) Déterminer les dimensions linéaires b et Y, sachant que :

$$Q = 5m^3/s \;;\; a = 4m \;;\; J = 2.10^{-4} \;;\alpha = 60^\circ \;(m = 0,57735027) \;;\nu = 10^{-6}m^2/s$$

b) Vérifier les calculs en déterminant, pour les dimensions linéaires obtenues à l'étape précédente :

i. Le gradient J de la perte de charge linéaire selon *Darcy-Weisbach*.

ii. Le débit volume Q par application de la formule générale.

iii. Le débit volume Q selon *Chézy*.

Solution

i. Calculons le paramètre C_1, en vertu de la relation (10) :

$$C_1 = \sqrt{1+m^{-2}} + 1 = \sqrt{1+0,57735027^{-2}} + 1 = 3$$

ii. Calculons le paramètre C^*, conformément à la relation (29) :

iii. $$C^* = \frac{(C_1 - 2)}{3C_1} = \frac{(3-2)}{3\times 3} = 1/9$$

iv. Selon la relation (47), le paramètre $\overline{q}$ est :

$$\overline{q} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57735027$$

v. Le modèle rugueux de référence de la conduite trapézoïdale considérée est caractérisé par le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$ et écoule le débit volume $\overline{Q} = Q$. Selon la relation (46), sa dimension linéaire horizontale $\overline{a}$ est donc :

$$\overline{a} = \left(\frac{m^3 C_1^2 \overline{Q}^2}{2g\overline{J}} \right)^{1/5} = \left(\frac{m^3 C_1^2 Q^2}{2gJ} \right)^{1/5} = \left(\frac{0,57735027^3 \times 3^2 \times 5^2}{2 \times 9,81 \times 2.10^{-4}} \right)^{1/5} = 6,43508559\, m$$

vi. Calculons le paramètre $\overline{\beta}$, par application de la relation de la relation (35) :

$$\overline{\beta} = \frac{C^* \overline{q}^{2/3} + \sqrt{\left(C^* \overline{q}^{2/3}\right)^2 + 4\left(1 - \overline{q}^{2/3}\right)\left(1 - C^{*2} \overline{q}^{2/3}\right)}}{2\left(1 - C^{*2} \overline{q}^{2/3}\right)}$$

Avec :

- $\overline{q}^{2/3} = 0,57735027^{2/3} = 0,69336127$
- $C^* \overline{q}^{2/3} = 0,69336127 / 9 = 0,07704014$
- $C^{*2} \overline{q}^{2/3} = 0,69336127 / 9^2 = 0,00856002$

Ainsi :

$$\overline{\beta} = \frac{0,07704014 + \sqrt{0,07704014^2 + 4 \times (1 - 0,69336127) \times (1 - 0,00856002)}}{2 \times (1 - 0,00856002)} = 0,59634323$$

vii. Les caractéristiques du modèle rugueux de référence de la conduite considérée sont, en particulier :

- L'aire de la section mouillée $\overline{A}$, telle que, conformément à la relation (13) :

$$\overline{A} = \overline{a}^2 \frac{\left(1 - \overline{\beta}^2\right)}{4m} = 6,43508559^2 \times \frac{(1 - 0,59634323^2)}{4 \times 0,57735027} = 11,5544108\, m^2$$

- Le périmètre mouillé $\overline{P}$, tel que, en vertu de la relation (14) :

$$\overline{P} = \overline{a}\left[C_1 - (C_1 - 2)\overline{\beta}\right]$$
$$= 6,43508559 \times [3 - (3 - 2) \times 0,59634323] = 15,467737\, m$$

viii. Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\overline{R} = \frac{4Q}{\overline{P}\nu} = \frac{4 \times 5}{15,467737 \times 10^{-6}} = 1293013,97$$

ix. Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est par suite :

$$\psi = 1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_h}}{4,75}+\frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5} = 1,35\times\left[-\log\left(\frac{8,5}{1293013,97}\right)\right]^{-2/5} = 0,69908282 \cong 0,7$$

x. Si l'on affectait au modèle rugueux de référence de la conduite considérée la dimension linéaire horizontale :

$$\overline{a} = a/\psi = 4/0,69908282 = 5,72491312\,m$$

alors son paramètre $\overline{\beta}$ serait égal à β de la conduite considérée $\left(\overline{\beta}=\beta\right)$.

Le débit relatif $\overline{Q}^*$ correspondant à cette nouvelle dimension linéaire est, selon la relation (19) :

$$\overline{Q}^* = \frac{m^{3/2}\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}\,\overline{a}^5}} = \frac{m^{3/2}Q}{\sqrt{gJ\left(a/\psi\right)^5}} = \frac{0,57735027^{3/2}\times 5}{\sqrt{9,81\times 2.10^{-4}\times 5,72491312^5}} = 0,63147667$$

xi. Le paramètre $\overline{q}$ est, en vertu de la relation (33) :

$$\overline{q} = \overline{Q}^*\sqrt{\frac{C_1}{2}} = 0,63147667\times\sqrt{\frac{3}{2}} = 0,77339782$$

Calculons :

- $\overline{q}^{2/3} = 0,77339782^{2/3} = 0,84256218$
- $C^*\overline{q}^{2/3} = 0,84256218/9 = 0,09361802$
- $C^{*2}\overline{q}^{2/3} = 0,84256218/9^2 = 0,010402$

xii. Ainsi, le paramètre β de la conduite considérée est, en vertu de la relation (35) :

$$\beta = \frac{C^*\overline{q}^{2/3} + \sqrt{\left(C^*\overline{q}^{2/3}\right)^2 + 4\left(1-\overline{q}^{2/3}\right)\left(1-C^{*2}\overline{q}^{2/3}\right)}}{2\left(1-C^{*2}\overline{q}^{2/3}\right)}$$

Soit :

$$\beta = \frac{0,09361802 + \sqrt{0,09361802^2 + 4\times\left(1-0,84256218\right)\times\left(1-0,010402\right)}}{2\times\left(1-0,010402\right)} = 0,44896021 \cong 0,45$$

xiii. Les dimensions linéaires recherchées sont donc :

- $b = a\beta$, selon la relation (2), soit :

$$b = 4\times 0,44896021 = 1,79682333\,m \cong 1,8\,m$$

- $Y = a\dfrac{(1-\beta)}{2m}$, selon la relation (4), soit :

$$Y = 4\times\frac{(1-0,44896021)}{2\times 0,57735027} = 1,90990216\,m \cong 1,91\,m$$

xiv. **Vérification des calculs**

a) ***Darcy-Weisbach***

Vérifions les calculs en déterminant, pour les dimensions linéaires calculées, le gradient J de la perte de charge linéaire selon la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} \tag{48}$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (7) :

$$A = a^2\frac{\left(1-\beta^2\right)}{4m} = 4^2\times\frac{\left(1-0,44896021^2\right)}{4\times 0,57735027} = 5,5377725\,m^2$$

- Le diamètre hydraulique D_h est, conformément à la relation (12) :

$$D_h = \frac{a\left(1-\beta^2\right)}{m\left[C_1-\left(C_1-2\right)\beta\right]} = \frac{4\times\left(1-0,44896021^2\right)}{0,57735027\times\left[3-\left(3-2\right)\times 0,44896021\right]} = 2,16960335\,m$$

- Le coefficient de frottement f de la relation (48) est, selon la **MMR** :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,69908282^5}{16} = 0,01043574$$

Ainsi, selon la relation (48), le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01043574}{2,16960335}\times\frac{5^2}{2\times 9,81\times 5,5377725^2} = 0,00019985 \cong 2.10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

b) ***Formule générale du débit volume***

Selon *Achour et Bedjaoui* (*Achour* and *Bedjaoui*, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g}\,A\sqrt{R_h J}\,\log\left(\frac{\varepsilon / R_h}{14{,}8} + \frac{10{,}04}{\overline{R}}\right) \tag{49}$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (49), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ s'exprime par :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \tag{50}$$

La relation (49) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = D_h / 4 = 2{,}16960335 / 4 = 0{,}54240084\,m$$

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est, selon la relation (50) :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9{,}81 \times 2.10^{-4} \times 0{,}54240084^3}}{10^{-6}} = 800746{,}416$$

Ainsi, le débit volume Q est, en vertu de la relation (49) :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9{,}81} \times 5{,}5377725 \times \sqrt{0{,}54240084 \times 2.10^{-4}} \times \log\left(\frac{10{,}04}{800746{,}416}\right)$$
$$= 5{,}00924\,m^3/s \cong 5\,m^3/s$$

Ainsi, le débit volume calculé selon la formule générale correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple considéré.

c) ***Formule de Chézy***

Selon *Chézy*, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \tag{51}$$

où $C\left(m^{0,5}/s\right)$ est le coefficient de résistance de *Chézy*. Selon la **MMR**, celui-ci est donné par :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{52}$$

soit :

$$C = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,69908282^{5/2}} = 86,7197307\, m^{0,5} / s \cong 87\, m^{0,5} / s$$

Le débit volume Q serait donc, selon la relation (51) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} = 86,7197307 \times 5,5377725 \times \sqrt{0,54240084 \times 2.10^{-4}} = 5,001821 m^3 / s \cong 5 m^3 / s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.