Considérations théoriques/Exercice n° 4

1) Définitions

Soit la conduite en charge de forme trapézoïdale représentée par la figure 1. Elle écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν, sous un gradient de la perte de charge linéaire J. Sa paroi interne est caractérisée par une rugosité absolue ε. La conduite est définie par ses dimensions linéaires horizontales a et b, par sa dimension verticale Y ainsi que par l'angle d'inclinaison α de sa paroi latérale par rapport à l'horizontale.

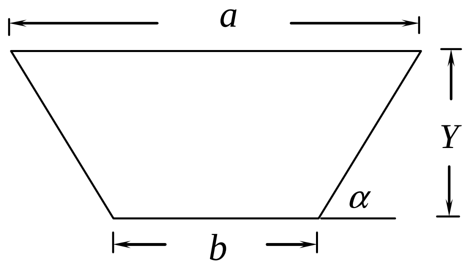

Figure 1 : Schéma de définition de la conduite en charge de forme trapézoïdale

Posons :

$$m = cotg(\alpha) \tag{1}$$

$$\beta = b / a \tag{2}$$

La géométrie de la conduite permet aisément de montrer que :

$$\frac{Y}{a-b} = \frac{1}{2m} \tag{3}$$

La relation (3) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{mY}{a} = \frac{1-\beta}{2} \tag{4}$$

Les configurations géométriques considérées sont toutes définies par $\beta < 1$, ou bien, selon la relation (4), par

$$\frac{mY}{a} < \frac{1}{2} \tag{5}$$

Notons que $\beta = 0$ correspond au cas limite d'une conduite en charge de forme triangulaire $(b = 0)$. Pour $m = 0$, correspondant à $\alpha = 90°$, la forme trapézoïdale de la conduite se transforme en une forme rectangulaire.

Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface
Université de Biskra, BP 145 RP 07000, Biskra, Algérie.
www.larhyss.org, info@larhyss.net , © 2008, Tous droits réservés

2) Caractéristiques de la conduite

Les caractéristiques de la conduite sont, en particulier :

- L'aire de la section mouillée A, soit :

$$A = bY + mY^2 \tag{6}$$

Introduisons la profondeur relative :

$$Y^* = \frac{mY}{b} \tag{7}$$

En ayant recours à la relation (7), il est alors aisé de montrer que la relation (6) s'écrit :

$$A = mY^2\left(1 + Y^{*-1}\right) \tag{8}$$

- Le périmètre mouillé P, soit :

$$P = a + b + \frac{(a-b)}{m}\sqrt{1+m^2} \tag{9}$$

avec :

$$a = b + 2mY \tag{10}$$

Posons :

$$C_1 = \sqrt{1+m^{-2}} + 1 \tag{11}$$

En tenant compte des relations (7) , (10) et (11), la relation (9) devient :

$$P = 2mY\left(C_1 + Y^{*-1}\right) \tag{12}$$

- Le diamètre hydraulique $D_h = 4A/P$, soit :

$$D_h = 2\frac{Y\left(1+Y^{*-1}\right)}{\left(C_1 + Y^{*-1}\right)}$$

ou bien :

$$D_h = 2Y\frac{\left(1+Y^*\right)}{\left(1+C_1 Y^*\right)} \tag{13}$$

3) Modèle rugueux de référence de la conduite

3.1) Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux de référence de la conduite en charge de forme trapézoïdale est schématiquement représenté sur la figure 2. Il est défini par les dimensions linéaires horizontales $\overline{a}$ et $\overline{b}$, par la dimension linéaire verticale $\overline{Y}$ et par l'angle d'inclinaison α de ses parois latérales par rapport à l'horizontale, égal à celui de la conduite.

Le modèle rugueux de référence écoule le débit volume $\overline{Q}$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J}$, d'un liquide de viscosité cinématique ν.

Les caractéristiques du modèle rugueux de référence sont régies par des relations identiques à celles que nous avons précédemment établies, en particulier les relations (8), (12) et (13). Ainsi :

- L'aire de la section mouillée $\overline{A}$ est :

$$\overline{A} = m\overline{Y}^2\left(1+\overline{Y}^{*-1}\right) \tag{14}$$

- Le périmètre mouillé $\overline{P}$ s'écrit :

$$\overline{P} = 2m\overline{Y}\left(C_1+\overline{Y}^{*-1}\right) \tag{15}$$

- Le diamètre hydraulique $\overline{D_h}$ s'exprime par :

$$\overline{D_h} = 2\overline{Y}\frac{\left(1+\overline{Y}^*\right)}{\left(1+C_1\overline{Y}^*\right)} \tag{16}$$

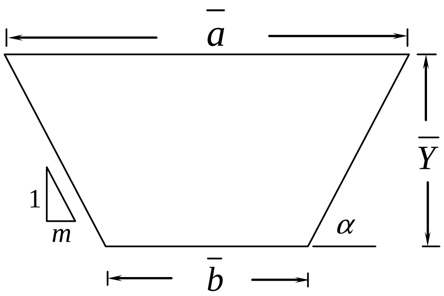

Figure 2 : Schéma de définition du modèle rugueux de référence de la conduite en charge de forme trapézoïdale

3.2) Relation régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence

La relation régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence d'une conduite en charge de forme donnée s'obtient en ayant recours à la relation de *Darcy-Weisbach* (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$\overline{J} = \frac{1}{128g}\frac{\overline{P}}{\overline{A}^3}\overline{Q}^2 \tag{17}$$

Compte tenu des relations (14) et (15), la relation (17) devient :

$$\overline{J} = \frac{1}{64g}\frac{\left(C_1 + \overline{Y}^{*-1}\right)}{m^2\overline{Y}^5\left(1+\overline{Y}^{*-1}\right)^3}\overline{Q}^2 \tag{18}$$

Introduisons, pour simplifier l'écriture de la relation (18), le débit relatif :

$$\overline{Q}^* = \frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}\,\overline{Y}^5}} \tag{19}$$

Notons aussi que, en vertu de la relation (11) :

$$m^{-2} = C_1\left(C_1 - 2\right) \tag{20}$$

Tenant compte des relations (19) et (20), la relation (18) permet d'écrire que :

$$\overline{Q}^{*2} = \frac{64\left(1+\overline{Y}^{*-1}\right)^3}{C_1\left(C_1-2\right)\left(C_1+\overline{Y}^{*-1}\right)} \tag{21}$$

La relation (21) constitue la relation régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence de la conduite en charge de forme trapézoïdale, lorsque la dimension linéaire de référence choisie est $\overline{Y}$.

Posons :

$$z = 1 + \overline{Y}^{*-1} \tag{22}$$

La relation (21) s'écrit alors :

$$\overline{Q}^{*2} = \frac{64z^3}{C_1\left(C_1-2\right)\left(z+C_1-1\right)} \tag{23}$$

Nous obtenons ainsi une équation du troisième degré en z, sans terme de second ordre, qui s'écrit :

$$z^3 - \frac{C_1(C_1-2)\overline{Q}^{*2}}{64} z - \frac{C_1(C_1-2)(C_1-1)\overline{Q}^{*2}}{64} = 0 \tag{24}$$

Le discriminant de l'équation (24) s'écrit :

$$\Delta = \left[\frac{\sqrt{C_1(C_1-2)(C_1-1)}\,\overline{Q}^*}{8\sqrt{2}}\right]^4 \left(1 - \frac{\sqrt{C_1(C_1-2)}}{12\sqrt{3}(C_1-1)}\overline{Q}^*\right)\left(1 + \frac{\sqrt{C_1(C_1-2)}}{12\sqrt{3}(C_1-1)}\overline{Q}^*\right) \tag{25}$$

Nous pouvons ainsi conclure que si :

- $\overline{Q}^* \leq \dfrac{12\sqrt{3}(C_1-1)}{\sqrt{C_1(C_1-2)}}$, alors $\Delta \geq 0$

  La racine réelle de l'équation (24) est alors :

$$z = \frac{\sqrt{C_1(C_1-2)}\,\overline{Q}^*}{4\sqrt{3}} ch(\gamma/3) \tag{26}$$

  où l'angle γ est tel que :

$$ch(\gamma) = \frac{12\sqrt{3}(C_1-1)}{\sqrt{C_1(C_1-2)}\,\overline{Q}^*} \tag{27}$$

  Compte tenu du changement de variables de la relation (22), la hauteur relative $\overline{Y}^*$ est donc telle que :

$$\overline{Y}^{*-1} = \frac{\sqrt{C_1(C_1-2)}\,\overline{Q}^*}{4\sqrt{3}} ch(\gamma/3) - 1 \tag{28}$$

- $\overline{Q}^* \geq \dfrac{12\sqrt{3}(C_1-1)}{\sqrt{C_1(C_1-2)}}$, alors $\Delta \leq 0$

  La racine réelle de l'équation (24) est alors :

$$z = \frac{\sqrt{C_1(C_1-2)}\,\overline{Q}^*}{4\sqrt{3}} \cos(\gamma/3) \tag{29}$$

  où l'angle γ est tel que :

$$\cos(\gamma) = \frac{12\sqrt{3}(C_1 - 1)}{\sqrt{C_1(C_1 - 2)\overline{Q}^*}} \tag{30}$$

La hauteur relative $\overline{Y}^*$ s'écrit donc, compte tenu de la relation (22) :

$$\overline{Y}^{*-1} = \frac{\sqrt{C_1(C_1 - 2)\overline{Q}^*}}{4\sqrt{3}}\cos(\gamma/3) - 1 \tag{31}$$

Exercice n° 4 :

Soit la conduite en charge de forme trapézoïdale représentée par la figure 1. Utiliser la **MMR** ainsi que les considérations théoriques ci-dessus exposées pour déterminer les dimensions linéaires b et a de la conduite considérée.

On donne :

$Q = 1,7\, m^3/s$; $Y = 1,3\, m$; $J = 2.10^{-4}$; $\alpha = 60^\circ$ $(m = 0,577350269)$; $\varepsilon = 10^{-3} m$; $\nu = 10^{-6} m^2/s$

Solution

1) La première étape du calcul consiste à déterminer la valeur du facteur de correction des dimensions linéaires ψ. Celui-ci peut être évalué en ayant recours aux étapes de calcul présentées au cours de l'exercice n° 1 (Fichier à télécharger).

i. Calculons le paramètre C_1, en vertu de la relation (11) :

$$C_1 = \sqrt{1 + m^{-2}} + 1 = \sqrt{1 + 0,577350269^{-2}} + 1 = 3$$

ii. Calculons le paramètre C^*, tel que :

$$C^* = \frac{(C_1 - 2)}{3C_1} = \frac{(3-2)}{3 \times 3} = 1/9$$

iii. Le paramètre $\overline{q}$ est, par suite :

$$\overline{q} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57735027$$

iv. Admettons que le modèle rugueux de référence, représenté par la figure 2, écoule le débit volume $\overline{Q} = Q$ sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$. Sa dimension linéaire horizontale $\overline{a}$ serait donc égale à :

$$\overline{a}=\left(\frac{m^3C_1^2\,\overline{Q}^2}{2g\,\overline{J}}\right)^{1/5}=\left(\frac{m^3C_1^2\,Q^2}{2gJ}\right)^{1/5}=\left(\frac{0,577350269^3\times 3^2\times 1,7^2}{2\times 9,81\times 2.10^{-4}}\right)^{1/5}=4,17970754\,m$$

v. Le paramètre $\overline{\beta}$ est :

$$\overline{\beta}=\frac{C^*\,\overline{q}^{\,2/3}+\sqrt{\left(C^*\,\overline{q}^{\,2/3}\right)^2+4\left(1-\overline{q}^{\,2/3}\right)\left(1-C^{*2}\,\overline{q}^{\,2/3}\right)}}{2\left(1-C^{*2}\,\overline{q}^{\,2/3}\right)}$$

avec :

- $\overline{q}^{\,2/3}=0,57735027^{2/3}=0,69336127$
- $C^*\,\overline{q}^{\,2/3}=0,69336127/9=0,07704014$
- $C^{*2}\,\overline{q}^{\,2/3}=0,69336127/9^2=0,00856002$

Ainsi :

$$\overline{\beta}=\frac{0,07704014+\sqrt{0,07704014^2+4\times(1-0,69336127)\times(1-0,00856002)}}{2\times(1-0,00856002)}=0,59634323$$

vi. Les caractéristiques du modèle rugueux de référence de la conduite considérée sont, en particulier :

- L'aire de la section mouillée $\overline{A}$, telle que :

$$\overline{A}=\overline{a}^2\,\frac{\left(1-\overline{\beta}^2\right)}{4m}=4,17970754^2\times\frac{(1-0,59634323^2)}{4\times 0,577350269}=4,87450969\,m^2$$

- Le périmètre mouillé $\overline{P}$, tel que :

$$\overline{P}=\overline{a}\left[C_1-(C_1-2)\overline{\beta}\right]$$
$$=4,17970754\times[3-(3-2)\times 0,59634323]=10,0465823\,m$$

- Le diamètre hydraulique $\overline{D_h}=4\overline{A}/\overline{P}$, soit :

$$\overline{D_h}=4\times 4,87450969/10,0465823=1,94076335\,m$$

vii. Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\overline{R}=\frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu}=\frac{4Q}{\overline{P}\nu}=\frac{4\times1,7}{10,0465823\times10^{-6}}=676847,09$$

viii. Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est par suite :

$$\psi=1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_h}}{4,75}+\frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5}$$

$$=1,35\times\left[-\log\left(\frac{10^{-3}/1,94076335}{4,75}+\frac{8,5}{676847,09}\right)\right]^{-2/5}=0,78189471$$

2) La seconde étape du calcul consiste à changer de dimension linéaire verticale du modèle rugueux de référence et à déterminer ensuite sa hauteur relative selon les considérations théoriques ci-dessus exposées.

i. Si l'on affectait au modèle rugueux de référence de la conduite considérée la dimension linéaire verticale :

$$\overline{Y}=Y/\psi=1,3/0,78189471=1,66262795\,m$$

alors sa hauteur relative $\overline{Y}^*$ serait égale à la hauteur relative Y^* de la conduite considérée, soit $\overline{Y}^*=Y^*$.

Le débit relatif $\overline{Q}^*$ correspondant à cette nouvelle dimension linéaire est, selon la relation (19) :

$$\overline{Q}^*=\frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}\overline{Y}^5}}=\frac{Q}{\sqrt{gJ\left(Y/\psi\right)^5}}=\frac{1,7}{\sqrt{9,81\times2.10^{-4}\times1,66262795^5}}=10,7674218$$

Nous pouvons ainsi constater que :

$$\overline{Q}^*<\frac{12\sqrt{3}\left(C_1-1\right)}{\sqrt{C_1\left(C_1-2\right)}}=\frac{12\times\sqrt{3}\times\left(3-1\right)}{\sqrt{3\times\left(3-2\right)}}=24$$

La hauteur relative $\overline{Y}^*$ est par suite régie par les relations (27) et (28), soit :

$$ch\left(\gamma\right)=\frac{12\sqrt{3}\left(C_1-1\right)}{\sqrt{C_1\left(C_1-2\right)}\,\overline{Q}^*}=\frac{12\times\sqrt{3}\times\left(3-1\right)}{\sqrt{3\times\left(3-2\right)}\times10,7674218}=2,22894584$$

Ce qui mène à :

$$\gamma=1,4400673\,\text{radian}$$

Ainsi :

$$\overline{Y}^{*-1} = \frac{\sqrt{C_1(C_1-2)\overline{Q}^*}}{4\sqrt{3}} ch(\gamma/3) - 1 = \frac{\sqrt{3\times(3-2)10,7674218}}{4\times\sqrt{3}} ch(1,4400673/3) - 1$$

soit :

$$\overline{Y}^{*-1} = Y^{*-1} = 2,00798717$$

ii. Conformément à la relation (7), la dimension linéaire horizontale b est :

$$b = mY\,Y^{*-1} = 0,577350269\times 1,3\times 2,00798717 = 1,50710551\,m \cong 1,5\,m$$

iii. Par suite, la dimension linéaire horizontale a est, selon la relation (10) :

$$a = b + 2mY = 1,50710551 + 2\times 0,577350269\times 1,3 = 3,00821621\,m \cong 3\,m$$

3) Vérification des calculs

Afin de confirmer la validité du calcul effectué, notamment celui des dimensions linéaires de la conduite, il est recommandé de le vérifier en déterminant :

i. Le gradient J de la perte de charge linéaire selon *Darcy-Weisbach* :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} \quad (32)$$

où f est le coefficient de frottement.

- Selon la **MMR**, le coefficient de frottement f de la relation (32) est :

$$f = \frac{\psi^5}{16} \quad (33)$$

soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,78189471^5}{16} = 0,01826507$$

- Le diamètre hydraulique D_h est, en vertu de la relation (13) :

$$D_h = 2Y\frac{(1+Y^*)}{(1+C_1Y^*)} = 2\times 1,3\times\frac{(1+2,00798717^{-1})}{(1+3\times 2,00798717^{-1})} = 1,56181538\,m$$

www.larhyss.org, info@larhyss.net , © 2008, Tous droits réservés

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (8) :

$$A = mY^2\left(1+Y^{*-1}\right) = 0,577350269\times1,3^2\times\left(1+2,00798717\right) = 2,93569663\,m^2$$

Selon la relation (32), le gradient J de la perte de charge linéaire serait donc égal à :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01826507}{1,56181538}\times\frac{1,7^2}{2\times9,81\times2,93569663^2} = 0,00019988 \cong 2.10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

ii. Le débit volume Q par la formule générale :

Selon *Achour* et *Bedjaoui* (*Achour* and *Bedjaoui*, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g}\,A\sqrt{R_hJ}\,\log\left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8}+\frac{10,04}{\overline{R}}\right) \qquad (34)$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (34), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ s'exprime par :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \qquad (35)$$

La relation (34) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = D_h/4 = 1,56181538/4 = 0,39045384\,m$$

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est, selon la relation (35) :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{9,81\times2.10^{-4}\times0,39045384^3}}{10^{-6}} = 489067,757$$

Ainsi, le débit volume Q est, en vertu de la relation (49) :

$$Q = -4\times\sqrt{2\times9,81}\times2,93569663\times\sqrt{0,39045384\times2.10^{-4}}\times$$
$$\log\left(\frac{10^{-3}/0,39045384}{14,8}+\frac{10,04}{489067,757}\right) = 1,70672\,m^3/s \cong 1,707\,m^3/s$$

Ainsi, le débit volume calculé selon la formule générale correspond, avec un écart relatif de moins de 0,4% seulement, à celui donné à l'énoncé de l'exemple considéré.

iii. Le débit volume Q par la formule de *Chézy* :

Selon *Chézy*, le débit volume Q est donné par la relation :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \tag{36}$$

où $C\left(m^{0,5}/s\right)$ est le coefficient de résistance de *Chézy*. Celui-ci est donné, selon la **MMR**, par la relation :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{37}$$

soit :

$$C = \frac{8\times\sqrt{2\times 9,81}}{0,78189471^{5/2}} = 65,5494123\, m^{0,5}/s \cong 66\, m^{0,5}$$

Selon la relation (36), le débit volume Q écoulé par la conduite considérée serait égal à :

$$Q = 65,5494123\times 2,93569663\times\sqrt{0,39045384\times 2.10^{-4}} = 1,70051249\, m^3/s \cong 1,7\, m^3/s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

 © 2008, Tous droits réservés