

Considérations théoriques/Exercice n° 1

1) Définitions

Soit la conduite en charge de forme trapézoïdale représentée par la figure 1. Elle écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν , sous un gradient de la perte de charge linéaire J . Sa paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue \mathcal{E} . La conduite est définie par ses dimensions linéaires horizontales a et b , par sa dimension verticale Y ainsi que par l'angle d'inclinaison α de sa paroi latérale par rapport à l'horizontale.

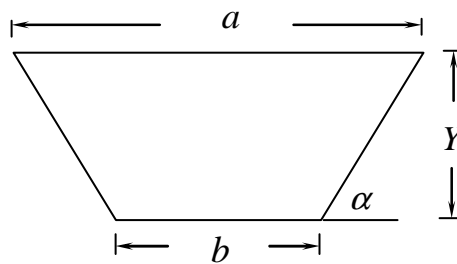


Figure 1 : Schéma de définition de la conduite en charge de forme trapézoïdale

Posons :

$$m = \cotg(\alpha) \quad (1)$$

$$\beta = b / a \quad (2)$$

La géométrie de la conduite permet aisément de montrer que :

$$\frac{Y}{a-b} = \frac{1}{2m} \quad (3)$$

La relation (3) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{mY}{a} = \frac{1-\beta}{2} \quad (4)$$

Les configurations géométriques considérées sont toutes définies par $\beta < 1$, ou bien, selon la relation (4), par

$$\frac{mY}{a} < \frac{1}{2} \quad (5)$$

Notons que $\beta = 0$ correspond au cas limite d'une conduite en charge de forme triangulaire ($b = 0$). Pour $m = 0$, correspondant à $\alpha = 90^\circ$, la forme trapézoïdale de la conduite se transforme en une forme rectangulaire.

2) Caractéristiques de la conduite

Les caractéristiques de la conduite sont, en particulier :

- L'aire de la section mouillée A , soit :

$$A = \frac{a^2 - b^2}{4m} \quad (6)$$

ou bien :

$$A = a^2 \frac{(1 - \beta^2)}{4m} \quad (7)$$

- Le périmètre mouillé P , soit :

$$P = a + b + \frac{(a - b)}{m} \sqrt{1 + m^2} \quad (8)$$

ou bien :

$$P = a \left[1 + \beta + \frac{(1 - \beta)}{m} \sqrt{1 + m^2} \right] \quad (9)$$

Posons :

$$C_1 = \sqrt{1 + m^{-2}} + 1 \quad (10)$$

La relation (9) s'écrit aussi :

$$P = a [C_1 - (C_1 - 2)\beta] \quad (11)$$

- Le diamètre hydraulique $D_h = 4A / P$, soit :

$$D_h = \frac{a(1 - \beta^2)}{m [C_1 - (C_1 - 2)\beta]} \quad (12)$$

3) Modèle rugueux de référence de la conduite

3.1) Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux de référence de la conduite en charge de forme trapézoïdale est schématiquement représenté sur la figure 2. Il est défini par les dimensions linéaires horizontales \bar{a} et \bar{b} , par la dimension linéaire verticale \bar{Y} et par l'angle d'inclinaison α de ses parois latérales par rapport à l'horizontale, égal à celui de la conduite.

Le modèle rugueux de référence écoule le débit volume \bar{Q} , sous le gradient de la perte de charge linéaire \bar{J} , d'un liquide de viscosité cinématique ν .

Les caractéristiques du modèle rugueux de référence sont régies par des relations identiques à celles que nous avons précédemment établies, en particulier les relations (7), (11) et (12). Ainsi :

- L'aire de la section mouillée \bar{A} est :

$$\bar{A} = \bar{a}^2 \frac{(1 - \bar{\beta}^2)}{4m} \quad (13)$$

- Le périmètre mouillé \bar{P} s'écrit :

$$\bar{P} = \bar{a} [C_1 - (C_1 - 2)\bar{\beta}] \quad (14)$$

- Le diamètre hydraulique \bar{D}_h s'exprime par :

$$\bar{D}_h = \frac{\bar{a}(1 - \bar{\beta}^2)}{m [C_1 - (C_1 - 2)\bar{\beta}]} \quad (15)$$

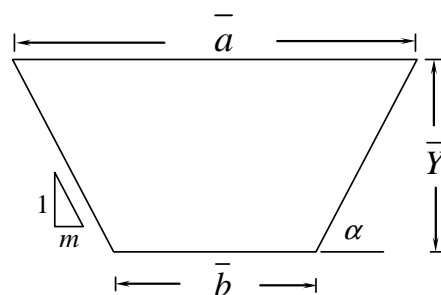


Figure 2 : Schéma de définition du modèle rugueux de référence de la conduite en charge de forme trapézoïdale

3.2) Relation régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence

La relation régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence d'une conduite en charge de forme donnée s'obtient en ayant recours à la relation de *Darcy-Weisbach* (Achour, 2007, *Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$\bar{J} = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} \bar{Q}^2 \quad (16)$$

Compte tenu des relations (13) et (14), la relation (16) devient :

$$\bar{J} = \frac{m^3}{2g} \frac{[C_1 - (C_1 - 2)\bar{\beta}]}{a^5 (1 - \bar{\beta}^2)^3} \bar{Q}^2 \quad (17)$$

La relation (17) permet de déduire que :

$$\bar{a} = \left[\frac{C_1 - (C_1 - 2)\bar{\beta}}{2(1 - \bar{\beta}^2)^3} \right]^{1/5} \left(\frac{m^{3/2} \bar{Q}}{\sqrt{g\bar{J}}} \right)^{2/5} \quad (18)$$

Introduisons, pour simplifier l'écriture de la relation (18), le débit relatif :

$$\bar{Q}^* = \frac{m^{3/2} \bar{Q}}{\sqrt{g\bar{J}a}} \quad (19)$$

La relation (18) devient alors :

$$\bar{Q}^* = \frac{\sqrt{2}(1 - \bar{\beta}^2)^{3/2}}{[C_1 - (C_1 - 2)\bar{\beta}]^{1/2}} \quad (20)$$

La relation (20) constitue la relation régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence de la conduite en charge de forme trapézoïdale.

La variation de $\bar{Q}^*(\bar{\beta})$, selon la relation (20), est représentée graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions cartésiennes de la figure 3 pour diverses valeurs de l'angle α .

La figure 3 révèle que pour une valeur fixée de l'angle α et pour les valeurs croissantes du paramètre $\bar{\beta}$, le débit relatif \bar{Q}^* augmente dans un premier temps, puis diminue dans un second temps en passant par un maximum. Notons également que les valeurs maximales du débit relatif \bar{Q}^* s'obtiennent pour de faibles valeurs de $\bar{\beta}$ et dépendent exclusivement de l'angle α et donc de C_1 .

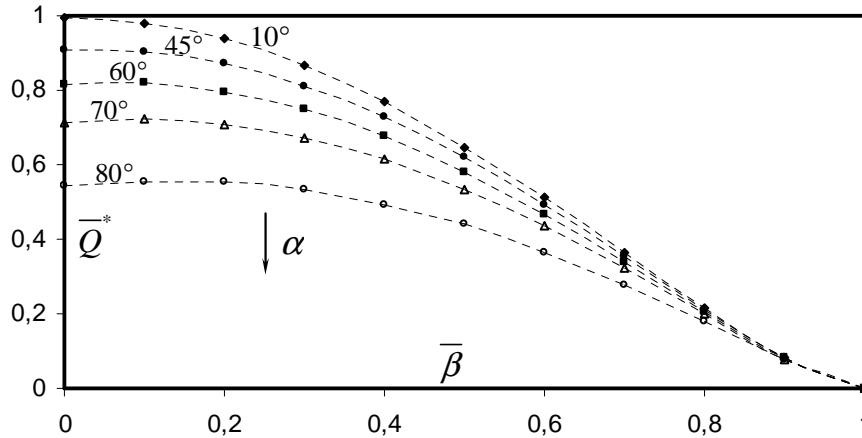


Figure 3 : Variation de $\bar{Q}^*(\bar{\beta})$ selon la relation (20), pour diverses valeurs de l'angle α .

3.3.) Débit relatif maximal

En égalant à zéro la dérivée première de \bar{Q}^* par rapport à $\bar{\beta}$ (Relation 20), il est alors possible de définir la relation fonctionnelle $\bar{\beta}_l = \bar{\beta}(\bar{Q}^* = \bar{Q}^*_{\max.})$, où $\bar{\beta}_l$ désigne « $\bar{\beta}$ limite » et $\bar{Q}^*_{\max.}$ est le débit relatif maximal.

Ainsi, en vertu de la relation (19), $d\bar{Q}^*/d\bar{\beta} = 0$ mène à l'équation du second ordre suivante :

$$\bar{\beta}_l^2 - \frac{6C_1}{5(C_1 - 2)}\bar{\beta}_l + \frac{1}{5} = 0 \quad (21)$$

La racine réelle de l'équation (21) est :

$$\bar{\beta}_l = \frac{3C_1 - 2\sqrt{C_1^2 + 5C_1 - 5}}{5(C_1 - 2)} \quad (22)$$

Selon la relation (20), il est évident que :

$$\bar{Q}^*_{\max.} = \frac{\sqrt{2}(1 - \bar{\beta}_l^2)^{3/2}}{[C_1 - (C_1 - 2)\bar{\beta}_l]^{1/2}} \quad (23)$$

3.4.) Relation explicite $\bar{\beta}(\bar{Q}^*)$

La relation (20) montre bien que le paramètre $\bar{\beta}$ est implicite vis-à-vis du débit relatif \bar{Q}^* . En ayant recours au théorème de Lagrange, il est possible de déterminer la solution exacte $\bar{\beta}(\bar{Q}^*)$ lorsque ce théorème est appliqué à la l'équation (20). Cependant, cette solution se présente en termes d'une série illimitée qui, de ce fait, ne présente aucun intérêt pratique lorsqu'elle est destinée à l'usage de l'ingénieur.

Afin d'exprimer une relation pratique $\bar{\beta}(\bar{Q}^*)$, adoptons la démarche suivante :

En élevant à la puissance $2/3$ les deux membres de l'équation (20), il vient que :

$$\bar{Q}^{*2/3} = \frac{2^{1/3}(1-\bar{\beta}^2)}{[C_1 - (C_1 - 2)\bar{\beta}]^{1/3}} \quad (24)$$

Cette dernière relation peut également s'écrire :

$$\bar{Q}^{*2/3} = \frac{2^{1/3}(1-\bar{\beta}^2)}{C_1^{1/3} \left[1 - \left(\frac{C_1 - 2}{C_1} \right) \bar{\beta} \right]^{1/3}} \quad (25)$$

ou bien :

$$\bar{Q}^{*2/3} = \left(\frac{2}{C_1} \right)^{1/3} \frac{(1-\bar{\beta}^2)}{\left[1 - \left(\frac{C_1 - 2}{C_1} \right) \bar{\beta} \right]^{1/3}} \quad (26)$$

Il est aisé de montrer que pour toute valeur de m et de $\bar{\beta}$:

$$\left(\frac{C_1 - 2}{C_1} \right) \bar{\beta} < 1 \quad (27)$$

Par un développement limité approprié d'ordre 2, nous pouvons écrire que :

$$\left[1 - \left(\frac{C_1 - 2}{C_1} \right) \bar{\beta} \right]^{1/3} \approx 1 - \frac{(C_1 - 2)\bar{\beta}}{3C_1} - \left[\frac{(C_1 - 2)\bar{\beta}}{3C_1} \right]^2 \quad (28)$$

Posons :

$$C^* = \frac{(C_1 - 2)}{3C_1} \quad (29)$$

La relation (28) s'écrit alors plus simplement sous la forme :

$$\left[1 - \left(\frac{C_1 - 2}{C_1} \right) \bar{\beta} \right]^{1/3} \approx 1 - C^* \bar{\beta} - (C^* \bar{\beta})^2 \quad (30)$$

Tenant compte de la relation (30), la relation (26) s'écrit :

$$\bar{Q}^{*2/3} = \left(\frac{2}{C_1}\right)^{1/3} \frac{(1-\bar{\beta}^2)}{1-C^*\bar{\beta}-(C^*\bar{\beta})^2} \quad (31)$$

Le débit relatif \bar{Q}^* est donc tel que :

$$\bar{Q}^* = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \left[\frac{1-\bar{\beta}^2}{1-C^*\bar{\beta}(1+C^*\bar{\beta})} \right]^{3/2} \quad (32)$$

Posons encore, par souci de simplification d'écriture :

$$\bar{q} = \bar{Q}^* \sqrt{\frac{C_1}{2}} \quad (33)$$

En tenant compte de cette dernière relation, la relation (31) s'écrit :

$$\bar{\beta}^2 - \frac{C^* \bar{q}^{-2/3}}{1-C^* \bar{q}^{-2/3}} \bar{\beta} + \frac{\bar{q}^{-2/3} - 1}{1-C^{*2} \bar{q}^{-2/3}} = 0 \quad (34)$$

La relation (34) montre que le paramètre $\bar{\beta}$ est régi par une équation du second ordre dont la seule racine réelle à retenir est :

$$\bar{\beta} = \frac{C^* \bar{q}^{-2/3} + \sqrt{(C^* \bar{q}^{-2/3})^2 + 4(1-\bar{q}^{-2/3})(1-C^{*2} \bar{q}^{-2/3})}}{2(1-C^{*2} \bar{q}^{-2/3})} \quad (35)$$

La relation (35) peut être appliquée avec une excellente approximation pour toute valeur de $\bar{\beta} < 1$ et $\alpha \leq 75^\circ$, touchant ainsi une large gamme de cas pratiques.

4) Cas particulier du profil en charge de forme triangulaire

4.1.) Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Certaines propriétés de la conduite en charge de forme triangulaire peuvent être d'un grand apport dans le dimensionnement de la conduite en charge de forme trapézoïdale.

Le modèle rugueux de référence du profil triangulaire en charge écoule le débit volume \bar{Q}_t et il est caractérisé par deux dimensions linéaires, l'une horizontale \bar{a}_t et l'autre verticale \bar{Y}_t , où l'indice « t » désigne la forme triangulaire. Ce profil est schématiquement représenté sur la figure 4.

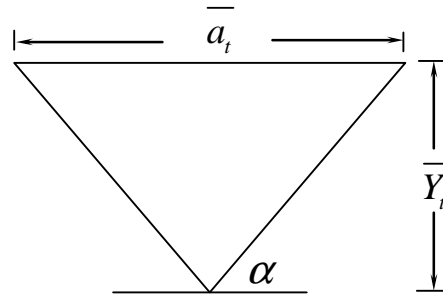


Figure 4 : Schéma de définition du modèle rugueux de référence de forme triangulaire

On considère un modèle rugueux de référence de forme triangulaire dont le gradient \bar{J} de la perte de charge linéaire ainsi que le paramètre m sont les mêmes que ceux du modèle rugueux de référence de forme trapézoïdale.

L'aire de sa section mouillée \bar{A}_t ainsi que le périmètre mouillé \bar{P}_t du modèle rugueux de référence de forme triangulaire sont respectivement donnés par les relations (13) et (14), pour $\bar{\beta} = 0$:

$$\bar{A}_t = \frac{\bar{a}_t^2}{4m} \quad (36)$$

$$\bar{P}_t = C_1 \bar{a}_t \quad (37)$$

L'écoulement dans le modèle rugueux de référence de forme triangulaire est régi par la relation (16) qui s'écrit :

$$\bar{J} = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}_t^2}{\bar{A}_t^3} \bar{Q}_t^2 \quad (38)$$

Tenant compte des relations (36) et (37), la relation (38) devient :

$$\bar{J} = \frac{1}{128g} \frac{C_1^2 \bar{a}_t^2}{\left(\frac{\bar{a}_t^2}{4m}\right)^3} \bar{Q}_t^2$$

soit :

$$\bar{J} = \frac{m^3 C_1^2}{2g \bar{a}_t^5} \bar{Q}_t^2 \quad (39)$$

En introduisant le débit relatif :

$$\bar{Q}_t^* = \frac{m^{3/2} \bar{Q}_t}{\sqrt{g \bar{J} \bar{a}_t^5}} \quad (40)$$

la relation (39) permet alors d'écrire que :

$$\bar{Q}_t^* = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \quad (41)$$

Ainsi, le débit relatif \bar{Q}_t^* ne dépend que du paramètre C_1 et donc de m . Ce résultat aurait pu être obtenu en considérant la relation (20), pour $\bar{\beta} = 0$.

En vertu des relations (33) et (41), il est donc possible d'écrire, pour le modèle rugueux de référence de forme triangulaire, que :

$$\bar{q}_t = 1 \quad (42)$$

4.2.) Comparaison avec la conduite en charge de forme trapézoïdale

Les modèles rugueux de référence des conduites en charge de formes triangulaire et trapézoïdale sont caractérisés par le même gradient \bar{J} de la perte de charge linéaire ainsi que par la même valeur du paramètre m et donc de celle de l'angle d'inclinaison α et de C_1 .

En comparant les relations (33) et (42), régissant respectivement le profil trapézoïdal et le profil triangulaire, il est bien évident que si celui-ci écoulait un débit volume :

$$\bar{Q}_t = \sqrt{C_1} \bar{Q} \quad (43)$$

alors nous pouvons écrire que :

$$\bar{a}_t \rightarrow \bar{a} \quad (44)$$

Autrement dit, lorsque le modèle rugueux de référence de forme triangulaire écoule un débit volume égal à $\sqrt{C_1}$ fois le débit volume écoulé par le modèle rugueux de référence de forme trapézoïdale, sa dimension linéaire horizontale \bar{a}_t serait égale à celle \bar{a} du modèle rugueux de référence de forme trapézoïdale.

Tenant compte de ce résultat, la relation (40) s'écrit :

$$\bar{Q}_t^* = \frac{m^{3/2} \sqrt{C_1} \bar{Q}}{\sqrt{g \bar{J} \bar{a}^5}} = \sqrt{\frac{2}{C_1}}$$

soit :

$$\bar{Q} = \frac{m^{3/2} \bar{Q}}{\sqrt{g \bar{J} \bar{a}^5}} = \frac{\sqrt{2}}{C_1} \quad (45)$$

La dimension linéaire horizontale \bar{a} du modèle rugueux de référence de forme trapézoïdale s'écrit alors :

$$\bar{a} = \left(\frac{m^3 C_1^2 \bar{Q}^2}{2g\bar{J}} \right)^{1/5} \quad (46)$$

Le paramètre \bar{q} de la relation (33) devient :

$$\bar{q} = \frac{\sqrt{2}}{C_1} \sqrt{\frac{C_1}{2}}$$

soit :

$$\bar{q} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \quad (47)$$

Exercice n°1 :

Soit la conduite en charge de forme trapézoïdale représentée par la figure 1. Utiliser la **MMR** ainsi que les considérations théoriques ci-dessus présentées pour déterminer les dimensions linéaires b et Y de la conduite considérée.

On donne :

$$Q = 0,399 \text{ m}^3 / \text{s} ; a = 1,6 \text{ m} ; J = 10^{-3} ; \alpha = 45^\circ (m = 1) ; \varepsilon = 10^{-4} \text{ m} ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Solution

i. Calculons le paramètre C_1 , en vertu de la relation (10) :

$$C_1 = \sqrt{1+m^{-2}} + 1 = \sqrt{1+1^{-2}} + 1 = \sqrt{2} + 1 = 2,41421356$$

ii. Calculons le paramètre C^* , conformément à la relation (29) :

$$C^* = \frac{(C_1 - 2)}{3C_1} = \frac{(2,41421356 - 2)}{3 \times 2,41421356} = 0,05719096$$

iii. Selon la relation (47), le paramètre \bar{q} est :

$$\bar{q} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} = \frac{1}{\sqrt{2,41421356}} = 0,64359425$$

iv. Le modèle rugueux de référence de la conduite trapézoïdale considérée est caractérisé par le gradient de la perte de charge linéaire $\bar{J} = J$ et écoule le débit volume $\bar{Q} = Q$. Selon la relation (46), sa dimension linéaire horizontale \bar{a} est donc :

$$\bar{a} = \left(\frac{m^3 C_1^2 \bar{Q}^2}{2gJ} \right)^{1/5} = \left(\frac{m^3 C_1^2 Q^2}{2gJ} \right)^{1/5} = \left(\frac{1^3 \times 2,41421356^2 \times 0,399^2}{2 \times 9,81 \times 10^{-3}} \right)^{1/5} = 2,16251751m$$

v. Calculons le paramètre $\bar{\beta}$, par application de la relation de la relation (35) :

$$\bar{\beta} = \frac{C^* \bar{q}^{-2/3} + \sqrt{\left(C^* \bar{q}^{-2/3} \right)^2 + 4 \left(1 - \bar{q}^{-2/3} \right) \left(1 - C^{*2} \bar{q}^{-2/3} \right)}}{2 \left(1 - C^{*2} \bar{q}^{-2/3} \right)}$$

avec :

- $\bar{q}^{-2/3} = 0,64359425^{2/3} = 0,74543212$
- $C^* \bar{q}^{-2/3} = 0,05719096 \times 0,74543212 = 0,04263198$
- $C^{*2} \bar{q}^{-2/3} = 0,05719096^2 \times 0,74543212 = 0,00243816$

Ainsi :

$$\bar{\beta} = \frac{0,04263198 + \sqrt{0,04263198^2 + 4 \times (1 - 0,74543212) \times (1 - 0,00243816)}}{2 \times (1 - 0,00243816)} = 0,52698322$$

vii. Les caractéristiques du modèle rugueux de référence de la conduite considérée sont, en particulier :

- L'aire de la section mouillée \bar{A} , telle que, conformément à la relation (13) :

$$\bar{A} = \bar{a}^2 \frac{(1 - \bar{\beta}^2)}{4m} = 2,16251751^2 \times \frac{(1 - 0,52698322^2)}{4 \times 1} = 0,8444425m^2$$

- Le périmètre mouillé \bar{P} , tel que, en vertu de la relation (14) :

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{a} \left[C_1 - (C_1 - 2) \bar{\beta} \right] \\ &= 2,16251751 \times [2,41421356 - (2,41421356 - 2) \times 0,52698322] = 4,74873699m \end{aligned}$$

- Le diamètre hydraulique $\bar{D}_h = 4\bar{A} / \bar{P}$, soit :

$$\bar{D}_h = 4 \times 0,8444425 / 4,74873699 = 0,7112986m$$

viii. Le nombre de Reynolds \bar{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 0,399}{4,74873699 \times 10^{-6}} = 336089,365$$

viii. Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est par suite :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-4} / 0,7112986}{4,75} + \frac{8,5}{336089,365} \right) \right]^{-2/5} = 0,75604689 \end{aligned}$$

ix. Si l'on affectait au modèle rugueux de référence de la conduite considérée la dimension linéaire horizontale :

$$\bar{a} = a / \psi = 1,6 / 0,75604689 = 2,11627085 \text{ m}$$

alors son paramètre $\bar{\beta}$ serait égal à β de la conduite considérée ($\bar{\beta} = \beta$).

Le débit relatif \bar{Q}^* correspondant à cette nouvelle dimension linéaire est, selon la relation (19) :

$$\bar{Q}^* = \frac{m^{3/2} \bar{Q}}{\sqrt{g J a^5}} = \frac{m^{3/2} Q}{\sqrt{g J (a / \psi)^5}} = \frac{1^{3/2} \times 0,399}{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 2,11627085^5}} = 0,61831569$$

x. Le paramètre \bar{q} est, en vertu de la relation (33) :

$$\bar{q} = \bar{Q}^* \sqrt{\frac{C_1}{2}} = 0,61831569 \times \sqrt{\frac{2,41421356}{2}} = 0,67933363$$

Calculons :

- $\bar{q}^{-2/3} = 0,67933363^{2/3} = 0,77277917$
- $C^* \bar{q}^{-2/3} = 0,05719096 \times 0,77277917 = 0,04419598$
- $C^{*2} \bar{q}^{-2/3} = 0,05719096^2 \times 0,77277917 = 0,00252761$

xi. Ainsi, le paramètre β de la conduite considérée est, en vertu de la relation (35) :

$$\beta = \frac{C^* \bar{q}^{-2/3} + \sqrt{\left(C^* \bar{q}^{-2/3} \right)^2 + 4 \left(1 - \bar{q}^{-2/3} \right) \left(1 - C^{*2} \bar{q}^{-2/3} \right)}}{2 \left(1 - C^{*2} \bar{q}^{-2/3} \right)}$$

Soit :

$$\beta = \frac{0,04419598 + \sqrt{0,04419598^2 + 4 \times (1 - 0,77277917) \times (1 - 0,00252761)}}{2 \times (1 - 0,00252761)} = 0,4999483 \cong 0,5$$

xii. Les dimensions linéaires recherchées sont donc :

- $b = a\beta$, selon la relation (2), soit :

$$b = 1,6 \times 0,5 = 0,8m$$

- $Y = a \frac{(1-\beta)}{2m}$, selon la relation (4), soit :

$$Y = 1,6 \times \frac{(1-0,5)}{2 \times 1} = 0,4m$$

xiii. **Vérification des calculs**

a) Darcy-Weisbach

Vérifions les calculs en déterminant, pour les dimensions linéaires calculées, le gradient J de la perte de charge linéaire selon la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (48)$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (7) :

$$A = a^2 \frac{(1-\beta^2)}{4m} = 1,6^2 \times \frac{(1-0,5^2)}{4 \times 1} = 0,48m^2$$

- Le diamètre hydraulique D_h est, conformément à la relation (12) :

$$D_h = \frac{a(1-\beta^2)}{m[C_1 - (C_1 - 2)\beta]} = \frac{1,6 \times (1-0,5^2)}{1 \times [2,41421356 - (2,41421356 - 2) \times 0,5]} = 0,54369821m$$

- Le coefficient de frottement f de la relation (48) est, selon la **MMR** :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,75604689^5}{16} = 0,01543916$$

Ainsi, selon la relation (48), le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01543916}{0,54369821} \times \frac{0,399^2}{2 \times 9,81 \times 0,48^2} = 10^{-3}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

b) Formule générale du débit volume

Selon Achour et Bedjaoui (Achour and Bedjaoui, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g}A\sqrt{R_h J} \log\left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (49)$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (49), le nombre de Reynolds \bar{R} s'exprime par :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \quad (50)$$

La relation (49) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = D_h / 4 = 0,54369821 / 4 = 0,13592455 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} est, selon la relation (50) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 0,13592455^3}}{10^{-6}} = 224618,925$$

Ainsi, le débit volume Q est, en vertu de la relation (49) :

$$\begin{aligned} Q &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,48 \times \sqrt{0,13592455 \times 10^{-3}} \times \log\left(\frac{10^{-4} / 0,13592455}{14,8} + \frac{10,04}{224618,925}\right) \\ &= 0,39908449 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 0,3991 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

Ainsi, le débit volume calculé selon la formule générale correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple considéré.

c) Formule de Chézy

Selon Chézy, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \quad (51)$$

où $C (m^{0.5} / s)$ est le coefficient de résistance de *Chézy*. Selon la **MMR**, celui-ci est donné par :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (52)$$

soit :

$$C = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,75604689^{5/2}} = 71,296409 m^{0,5} / s \cong 71 m^{0,5} / s$$

Le débit volume Q serait donc, selon la relation (51) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} = 71,296409 \times 0,48 \times \sqrt{0,13592455 \times 10^{-3}} = 0,39898618 m^3 / s \cong 0,399 m^3 / s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.