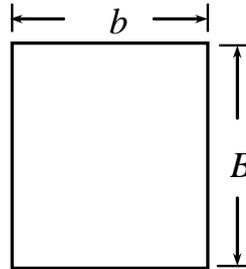


## Exercice n° 2

Soit la conduite en charge de forme rectangulaire représentée par la figure ci-dessous. Elle écoule un débit volume  $Q$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu$ , sous un gradient de la perte de charge linéaire  $J$ . Sa paroi interne est caractérisée par une rugosité absolue  $\varepsilon$ . La forme rectangulaire de la conduite est définie par le paramètre de forme  $\eta = b / B$ , appelé aussi rapport d'aspect.



- a) Exprimer les principales caractéristiques de la conduite.
- b) En ayant recours à la **MMR**, donner l'expression de la dimension linéaire horizontale  $\bar{b}$  du modèle rugueux de référence de la conduite considérée.
- c) Déterminer la dimension linéaire verticale  $B$  de la conduite, pour les données suivantes :  
 $Q = 3,5 \text{ m}^3 / \text{s}$  ;  $b = 2,25 \text{ m}$  ;  $J = 10^{-4}$  ;  $\varepsilon = 0,002 \text{ m}$  ;  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$
- d) Pour la dimension linéaire  $B$  ainsi calculée, vérifier les calculs en déterminant :
  - i. Le gradient  $J$  de la perte de charge linéaire selon *DarcyWeisbach*.
  - ii. Le débit volume  $Q$  par application de la relation générale.
  - iii. Le débit volume  $Q$  par application de la formule de *Chézy*.

## Solution

- a) La conduite en charge étant caractérisée par les dimensions linéaires  $b$  et  $B$ , l'aire de la section mouillée est donc :

$$A = bB = \frac{b^2}{\eta} \quad (1)$$

Le périmètre mouillé  $P$  est :

$$P = 2(B + b) = 2b \left( \frac{1 + \eta}{\eta} \right) \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) permettent de déduire que le diamètre hydraulique  $D_h$  est :

$$D_h = 4A / P = 4 \frac{b^2}{\eta} \frac{1}{2b \left( \frac{1+\eta}{\eta} \right)}$$

soit :

$$D_h = \frac{2b}{1+\eta} \quad (3)$$

- b) La **MMR** (Achour, 2007, *Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) se base sur la formule bien connue de Darcy-Weisbach. Appliquée au modèle rugueux de référence, celle-ci s'écrit :

$$\bar{J} = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} \bar{Q}^2 \quad (4)$$

L'aire  $\bar{A}$  et le périmètre mouillé  $\bar{P}$  du modèle rugueux sont donnés respectivement par les relations (1) et (2) de sorte que :

$$\bar{A} = \frac{\bar{b}^2}{\eta} \quad (5)$$

$$\bar{P} = 2\bar{b} \left( \frac{1+\eta}{\eta} \right) \quad (6)$$

En tenant compte des relations (5) et (6), la relation (4) devient :

$$\bar{J} = \frac{1}{128g} \frac{2\bar{b}(1+\eta)}{\eta \left( \frac{\bar{b}^2}{\eta} \right)^3} \bar{Q}^2$$

ou bien :

$$\bar{J} = \frac{1}{64g} \frac{\bar{\eta}^2 (1+\bar{\eta})}{\bar{b}^5} \bar{Q}^2 \quad (7)$$

Ceci permet d'écrire que :

$$\bar{b} = \left[ \frac{\bar{\eta}^2 (1+\bar{\eta})}{64} \right]^{1/5} \left( \frac{\bar{Q}^2}{g\bar{J}} \right)^{1/5} \quad (8)$$

- c) 1) Admettons que le modèle rugueux écoule le débit  $\bar{Q} = Q$ , sous le gradient de la perte de charge linéaire  $\bar{J} = J$  et pour la dimension linéaire  $\bar{b} = b$ . Ces considérations impliquent que  $\bar{B} \neq B$ , voire même  $\bar{B} > B$ , et que, par voie de conséquence,  $\bar{\eta} \neq \eta$ . La relation (8) devient alors :

$$b = \left[ \frac{\bar{\eta}^{-2} (1 + \bar{\eta})}{64} \right]^{1/5} \left( \frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (9)$$

En introduisant le débit relatif :

$$\bar{Q}_b^* = Q_b^* = \frac{Q}{\sqrt{gJb^5}} \quad (10)$$

la relation (9) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$\frac{\bar{\eta}^{-2} (1 + \bar{\eta})}{64} Q_b^{*2} = 1 \quad (11)$$

soit :

$$\bar{\eta}^{-3} + \bar{\eta}^{-2} - \frac{64}{Q_b^{*2}} = 0 \quad (12)$$

Le paramètre de forme  $\bar{\eta}$  du modèle rugueux de référence est donc régi par une équation de troisième degré. En adoptant le changement de variable :

$$\bar{\eta} = x - \frac{1}{3} \quad (13)$$

la relation (12) se transforme alors en une équation de troisième degré en  $x$ , sans terme de second ordre :

$$x^3 - \frac{1}{3}x + \left( \frac{2}{27} - \frac{64}{Q_b^{*2}} \right) = 0 \quad (14)$$

Le discriminant de l'équation (14) s'écrit :

$$\Delta = -\frac{64}{27Q_b^{*4}} (Q_b^* - 12\sqrt{3})(Q_b^* + 12\sqrt{3}) \quad (15)$$

Nous pouvons ainsi conclure que si :

$$i. \quad Q_b^* \leq 12\sqrt{3}, \text{ alors } \Delta \geq 0$$



Dans ce cas, la racine réelle de l'équation (14) est :

$$x = \frac{2}{3} ch(\beta / 3) \quad (16)$$

où l'angle  $\beta$  est tel que :

$$ch(\beta) = \frac{864}{Q_b^{*2}} - 1 \quad (17)$$

En tenant compte des relations (13) et (16), le paramètre de forme  $\bar{\eta}$  s'écrit :

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} [2ch(\beta / 3) - 1] \quad (18)$$

ii.  $Q_b^* \geq 12\sqrt{3}$ , alors  $\Delta \leq 0$

Dans ce cas, la racine réelle de l'équation (14) est :

$$x = \frac{2}{3} \cos(\beta / 3) \quad (19)$$

où l'angle  $\beta$  est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{864}{Q_b^{*2}} - 1 \quad (20)$$

2) Les données du problème sont telles que, en vertu de la relation (10) :

$$Q_b^* = \frac{3,5}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 2,25^5}} = 14,7155753 < 12\sqrt{3}$$

Le paramètre de forme  $\bar{\eta}$  est donc donné par les relations (17) et (18), soit :

$$ch(\beta) = \frac{864}{Q_b^{*2}} - 1 = \frac{864}{14,7155753^2} - 1 = 2,98987465$$

ou bien :  $\beta = 1,75916051$  radian

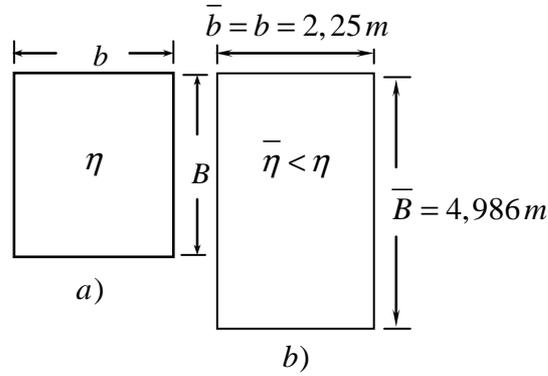
Ainsi :

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} [2ch(\beta / 3) - 1] = \frac{1}{3} \times [2 \times ch(1,75916051 / 3) - 1] = 0,45127195$$

Ceci permet de déduire que la dimension linéaire  $\bar{B}$  du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{B} = \bar{b} / \bar{\eta} = b / \eta = 2,25 / 0,45127195 \cong 4,986 m \quad \bar{B} = 4,986 m$$

Les résultats ainsi obtenus permettent de représenter schématiquement le modèle rugueux de référence et de le comparer à la conduite considérée (Figure 1 a et b):



**Figure 1** : Comparaison entre la conduite considérée (a) et son modèle rugueux de référence (b)

Nous pouvons donc observer que le modèle rugueux de référence ainsi obtenu est beaucoup plus haut que ne l'est la conduite considérée, impliquant que  $\bar{\eta} < \eta$ .

3) Le périmètre mouillé  $\bar{P}$  du modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (6) :

$$\bar{P} = 2\bar{b} \left( \frac{1+\bar{\eta}}{\bar{\eta}} \right) = 2b \left( \frac{1+\bar{\eta}}{\bar{\eta}} \right) = 2 \times 2,25 \times \left( \frac{1+0,45127195}{0,45127195} \right) = 14,4718141 m$$

4) Le nombre de Reynolds de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est par suite :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{\bar{P}\nu} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 3,5}{14,4718141 \times 10^{-6}} = 967397,723$$

5) Le diamètre hydraulique  $\bar{D}_h$  est, selon la relation (3) :

$$\bar{D}_h = \frac{2\bar{b}}{1+\bar{\eta}} = \frac{2b}{1+\bar{\eta}} = \frac{2 \times 2,25}{1+0,45127195} = 3,10072829 m$$

6) Le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est, selon la MMR :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (21)$$

Soit :

$$\psi = 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{0,002 / 3,10072829}{4,75} + \frac{8,5}{967397,723} \right) \right]^{-2/5} = 0,78814459$$

La relation (21) couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*, sans aucune restriction. Elle s'applique à toutes les formes usuelles de conduites et canaux, en charge et à surface libre. La **MMR** montre que le facteur de correction  $\psi$  est, dans tous les cas, inférieur à l'unité.

7) Si l'on affectait à présent, au modèle rugueux de référence, la dimension linéaire horizontale :

$$\frac{b}{\psi} = \frac{2,25}{0,78814459} = 2,85480611m \cong 2,855m$$

alors son paramètre de forme  $\bar{\eta}$  deviendrait égal à celui de la conduite considérée, soit :  $\bar{\eta} = \eta$ .

La valeur du paramètre de forme  $\bar{\eta} = \eta$  est obtenue par la résolution de l'équation (12) pour le débit relatif :

$$\bar{Q}_b^* = \frac{Q}{\sqrt{gJ(b/\psi)^5}} = \frac{3,5}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 2,85480611^5}} = 8,11506491$$

Puisque  $\bar{Q}_b^* = 8,11506491 < 12\sqrt{3}$ , alors la racine réelle de l'équation (12) est donnée par les relations (17) et (18). Ainsi :

$$ch(\beta) = \frac{864}{\bar{Q}_b^{*2}} - 1 = \frac{864}{8,11506491^2} - 1 = 12,1198765$$

soit :

$$\beta = 3,18628767 \text{ radians.}$$

Par suite :

$$\bar{\eta} = \eta = \frac{1}{3} [2ch(\beta/3) - 1] = \frac{1}{3} \times [2 \times ch(3,18628767/3) - 1] = 0,74605243 \cong 0,746$$

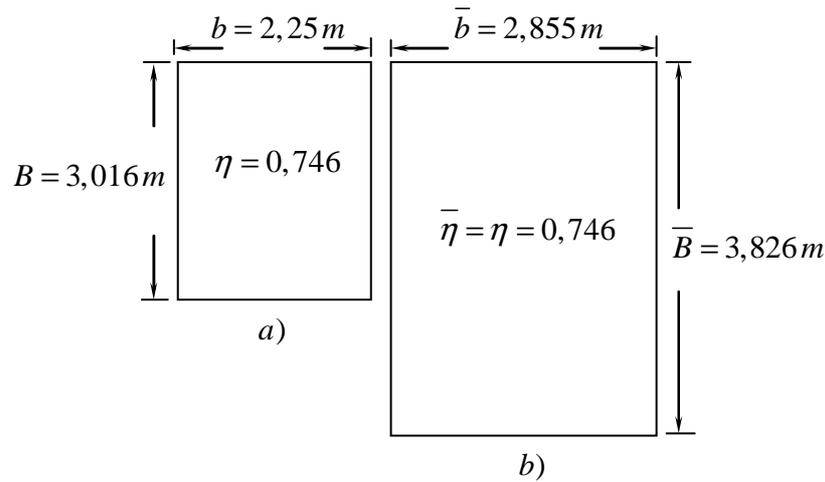
La dimension linéaire horizontale  $\bar{B}$  du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{B} = \frac{b/\psi}{\bar{\eta}} = \frac{2,85480611}{0,74605243} = 3,8265489m \cong 3,826m$$

8) Ainsi, la valeur recherchée de la dimension linéaire horizontale  $B$  de la conduite considérée est :

$$B = \frac{b}{\eta} = \frac{2,25}{0,74605243} = 3,01587383m \cong 3,016m$$

9) Tous ces résultats peuvent être schématisés (Figure 2) à titre de comparaison entre les dimensions linéaires de la conduite considérée et celles de son modèle rugueux de référence.



**Figure 2 :** Comparaison entre les dimensions linéaires de la conduite considérée (a) et celles de son modèle rugueux de référence (b), pour la même valeur du paramètre de forme  $\eta$ .

**d) Vérifications des calculs**

i. Selon la relation de *Darcy-Weisbach*, le gradient de la perte de charge linéaire  $J$  est :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \tag{22}$$

où  $f$  désigne le coefficient de frottement. Celui-ci est donné par la relation :

$$f = \frac{\psi^5}{16} \tag{23}$$

Soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,78814459^5}{16} = 0,01900682$$

L'aire de la section mouillée  $A$  est :

$$A = bB = 2,25 \times 3,01587383 = 6,78571612 \text{ m}^2$$

Le périmètre mouillé  $P$  est :

$$P = 2(B + b) = 2 \times (3,01587383 + 2,25) = 10,5317477 \text{ m}$$

Le diamètre hydraulique  $D_h = 4A / P$  est par suite :

$$D_h = 4 \times \frac{6,78571612}{10,5317477} = 2,5772422 \text{ m}$$

Ainsi, le gradient de la perte de charge linéaire  $J$  est, selon la relation (22) :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01900682}{2,5772422} \times \frac{3,5^2}{2 \times 9,81 \times 6,78571612^2} = 10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de  $J$  donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

- ii. La formule générale du débit est, selon Achour et Bedjaoui (Achour and Bedjaoui, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h J} \log\left(\frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (24)$$

$R_h$  désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (24), le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  s'exprime par :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \quad (25)$$

La relation (24) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de Moody.

Le rayon hydraulique  $R_h$  est :

$$R_h = A / P = 6,78571612 / 10,5317477 = 0,64431055 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  est, selon la relation (25) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 0,64431055^3}}{10^{-6}} = 733064,761$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  est en vertu de la relation (24) :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 6,78571612 \times \sqrt{0,64431055 \times 10^{-4}} \times \log\left(\frac{0,002 / 0,64431055}{14,8} + \frac{10,04}{733064,761}\right) \\ \cong 3,523 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons conclure que la valeur ainsi calculée du débit volume correspond, avec un écart relatif de moins de 0,67%, à celle donnée à l'énoncé de l'exemple considéré.

- iii. Selon la relation de Chézy, le débit volume  $Q$  est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \quad (26)$$

où  $C(m^{0,5} / s)$  est le coefficient de résistance de Chézy.



Le coefficient  $C$  est lié au facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  par la relation (Achour, 2007, *Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1: Conduites et Canaux en charge*, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (27)$$

Soit :

$$C = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,78814459^{5/2}} = 64,2576348 m^{0,5} / s \cong 64 m^{0,5} / s$$

Le débit volume  $Q$  est par suite, selon la relation (27) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} = 64,2576348 \times 6,78571612 \times \sqrt{0,64431055 \times 10^{-4}} = 3,5 m^3 / s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume  $Q$  donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.