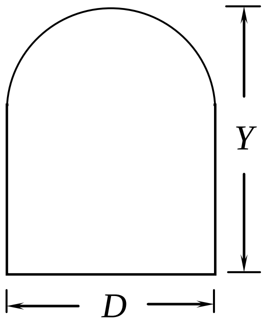
Exercice n° 1

Soit la conduite en charge en forme de voûte représentée par la figure ci-dessous. Elle écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν, sous un gradient de la perte de charge linéaire J. Sa paroi interne est caractérisée par une rugosité absolue ε. La forme de la conduite est définie par le paramètre de forme $\eta = Y/D$, où Y est la hauteur de la conduite et D est le diamètre du toit voûté.



a) Exprimer les principales caractéristiques de la conduite.

b) En ayant recours à la **MMR**, donner l'expression de la dimension linéaire $\overline{D}$ du modèle rugueux de référence de la conduite considérée.

c) Déterminer la dimension linéaire verticale Y, pour les données suivantes :

$Q = 3,013 m^3/s$; $D = 1,6 m$; $J = 2.10^{-4}$;
$\varepsilon \to 0$ (Paroi interne pratiquement lisse) ; $\nu = 10^{-6} m^2/s$

d) Pour la dimension linéaire Y ainsi obtenue, vérifier les calculs en déterminant :

i. Le gradient J de la perte de charge linéaire selon *DarcyWeisbach*.

ii. Le débit volume Q par application de la relation générale.

iii. Le débit volume Q par application de la formule de *Chézy*.

Solution

a) La conduite en charge étant caractérisée par les dimensions linéaires Y et D, l'aire de la section mouillée A est la somme de l'aire de la section rectangulaire de hauteur $(Y - D/2)$ et de la largeur D, et de l'aire de la section semi-circulaire de diamètre D. Ainsi :

$$A = \left(Y - D/2\right)D + \pi D^2/8$$

soit :

$$A = D^2\left(\frac{Y}{D} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \tag{1}$$

En désignant par C_0, la constante :

$$C_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}107300918 \tag{2}$$

la relation (1) s'écrit :

$$A = D^2\left(\eta - C_0\right) \tag{3}$$

Le périmètre mouillé P s'obtient en faisant la somme du périmètre de la partie rectangulaire de la conduite et de celui de demi-cercle constituant le toit voûté, soit :

$$P = 2\left(Y - \frac{D}{2}\right) + D + \frac{\pi D}{2}$$

soit :

$$P = 2D\left(\eta + \frac{\pi}{4}\right) \tag{4}$$

Le diamètre hydraulique $D_h = 4A/P$ est par suite :

$$D_h = 4\frac{D^2\left(\eta - C_0\right)}{2D\left(\eta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

ou bien :

$$D_h = 2D\frac{\left(\eta - C_0\right)}{\left(\eta + \frac{\pi}{4}\right)} \tag{5}$$

b) La **MMR** (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) se base sur la formule bien connue de *Darcy-Weisbach*. Appliquée au modèle rugueux de référence, celle-ci s'écrit :

$$\overline{J} = \frac{1}{128g}\frac{\overline{P}}{\overline{A}^3}\overline{Q}^2 \tag{6}$$

L'aire $\overline{A}$ et le périmètre mouillé $\overline{P}$ du modèle rugueux sont donnés respectivement par les relations (3) et (4) de sorte que :

$$\overline{A} = \overline{D}^2\left(\overline{\eta} - C_0\right) \tag{7}$$

$$\overline{P} = 2\overline{D}\left(\overline{\eta} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{8}$$

En tenant compte des relations (7) et (8), la relation (6) devient :

$$\overline{J}=\frac{1}{128g}\frac{2\overline{D}\left(\overline{\eta}+\frac{\pi}{4}\right)}{\left[\overline{D}^{2}\left(\overline{\eta}-C_{0}\right)\right]^{3}}\overline{Q}^{2}$$

ou bien :

$$\overline{J}=\frac{1}{64}\frac{\left(\overline{\eta}+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\overline{\eta}-C_{0}\right)^{3}}\left(\frac{\overline{Q}^{2}}{g\overline{D}^{5}}\right) \tag{9}$$

Ceci permet de déduire que :

$$\overline{D}=\left[\frac{\overline{\eta}+\frac{\pi}{4}}{64\left(\overline{\eta}-C_{0}\right)^{3}}\right]^{1/5}\left(\frac{\overline{Q}^{2}}{g\overline{J}}\right)^{1/5} \tag{10}$$

c) **1)** Admettons que le modèle rugueux écoule le débit $\overline{Q}=Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J}=J$ et pour la dimension linéaire $\overline{D}=D$. Ces considérations impliquent que $\overline{Y}\neq Y$ et que, par voie de conséquence, $\overline{\eta}\neq\eta$. La relation (10) devient alors :

$$D=\left[\frac{\overline{\eta}+\frac{\pi}{4}}{64\left(\overline{\eta}-C_{0}\right)^{3}}\right]^{1/5}\left(\frac{Q^{2}}{gJ}\right)^{1/5} \tag{11}$$

En introduisant le débit relatif :

$$\overline{Q}_{D}^{*}=Q_{D}^{*}=\frac{Q}{\sqrt{gJD^{5}}} \tag{12}$$

la relation (11) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$\frac{\overline{\eta}+\frac{\pi}{4}}{64\left(\overline{\eta}-C_{0}\right)^{3}}Q_{D}^{*\,2}=1 \tag{13}$$

En adoptant le changement de variables :

$$x=\overline{\eta}-C_{0} \tag{14}$$

la relation (13) permet alors d'écrire que :

$$x^3 - \frac{Q_D^{*2}}{64}x - \frac{(1+\pi/4)}{128}Q_D^{*2} = 0 \tag{15}$$

Nous obtenons ainsi une équation de troisième degré en x, sans terme de second ordre.

Le discriminant de l'équation (15) s'écrit :

$$\Delta = 3\left(\frac{Q_D^*}{48\sqrt{2}}\right)^4 \left[(1+\pi/4)6\sqrt{3} - Q_D^*\right]\left[(1+\pi/4)6\sqrt{3} + Q_D^*\right] \tag{16}$$

Nous pouvons ainsi conclure que si :

i. $Q_D^* \le (1+\pi/4)6\sqrt{3}$, alors $\Delta \ge 0$

Dans ce cas, la racine réelle de l'équation (15) est :

$$x = \frac{Q_D^*}{4\sqrt{3}} ch(\beta/3) \tag{17}$$

où l'angle β est tel que :

$$ch(\beta) = \frac{(1+\pi/4)6\sqrt{3}}{Q_D^*} \tag{18}$$

En tenant compte de la relation (14), il vient que :

$$\overline{\eta} = C_0 + \frac{Q_D^*}{4\sqrt{3}} ch(\beta/3) \tag{19}$$

La relation (19) est la solution exacte de l'équation de troisième degré (13), lorsque le débit relatif Q_D^* est tel que $Q_D^* \le (1+\pi/4)6\sqrt{3}$.

ii. $Q_D^* \ge (1+\pi/4)6\sqrt{3}$, alors $\Delta \le 0$

Dans ce cas, la racine réelle de l'équation (15) est :

$$x = \frac{Q_D^*}{4\sqrt{3}} \cos(\beta/3) \tag{20}$$

où l'angle β est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{(1+\pi/4)6\sqrt{3}}{Q_D^*} \tag{21}$$

En tenant compte de la relation (14), il vient que :

$$\overline{\eta} = C_0 + \frac{Q_D^*}{4\sqrt{3}}\cos(\beta/3) \tag{22}$$

La relation (22) est la solution exacte de l'équation de troisième degré (13), lorsque le débit relatif Q_D^* est tel que $Q_D^* \geq (1+\pi/4)6\sqrt{3}$.

2) Les données du problème sont telles que :

$$Q_D^* = \frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} = \frac{3,013}{\sqrt{9,81\times 2.10^{-4}\times 1,6^5}} = 21,00630532 > (1+\pi/4)6\sqrt{3}$$

Le paramètre de forme $\overline{\eta}$ est donc donné par les relations (21) et (22), soit :

$$\cos(\beta) = \frac{(1+\pi/4)6\sqrt{3}}{Q_D^*} = \frac{(1+\pi/4)\times 6\times\sqrt{3}}{21,00630532} = 0,883277745$$

ou bien : $\beta = 0,487988484$ radian

Ainsi :

$$\overline{\eta} = C_0 + \frac{Q_D^*}{4\sqrt{3}}\cos(\beta/3) = 0,107300918 + \frac{21,00630532}{4\times\sqrt{3}}\times\cos(0,487988484/3)$$
$$= 3,099276165$$

Ceci permet de déduire que la dimension linéaire verticale $\overline{Y}$ du modèle rugueux de référence est :

$$\overline{Y} = \overline{D}\,\overline{\eta} = D\overline{\eta} = 1,6\times 3,099276165 \cong 4,959\,m$$

Les résultats ainsi obtenus permettent de représenter schématiquement le modèle rugueux de référence et de le comparer à la conduite considérée (Figure 1 *a* et *b*):

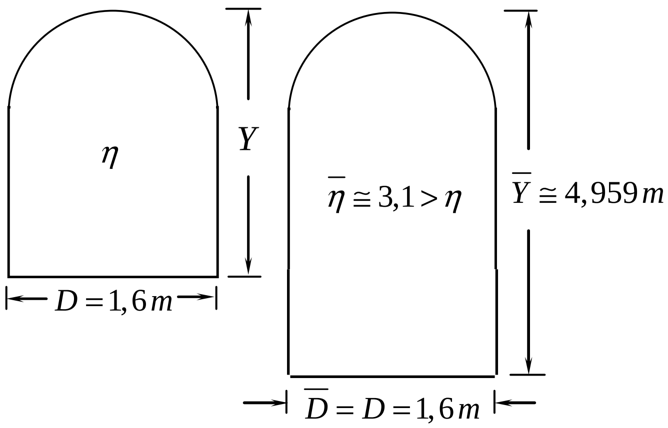


Figure 1 : Comparaison entre la conduite considérée (*a*) et son modèle rugueux de référence (*b*)

Nous pouvons donc observer que le modèle rugueux de référence ainsi obtenu est beaucoup plus allongé que ne l'est la conduite considérée, impliquant que $\overline{\eta} > \eta$.

3) Le périmètre mouillé $\overline{P}$ du modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (8) :

$$\overline{P} = 2\overline{D}\left(\overline{\eta}+\frac{\pi}{4}\right) = 2\times D\times\left(\overline{\eta}+\frac{\pi}{4}\right) = 2\times 1,6\times\left(3,099276165+\frac{\pi}{4}\right) = 12,43095785\,m$$

4) Le nombre de *Reynolds* de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est par suite :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu} = \frac{4Q}{\overline{P}\nu} = \frac{4\times 3,013}{12,43095785\times 10^{-6}} = 969514,9918$$

5) Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la **MMR** :

$$\psi = 1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_h}}{4,75}+\frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5} \tag{23}$$

Soit :

$$\psi = 1,35\times\left[-\log\left(\frac{8,5}{969514,9918}\right)\right]^{-2/5} = 0,705946727$$

La relation (23) couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*, sans aucune restriction. Elle s'applique à toutes les formes usuelles de conduites et canaux, en charge et à surface libre. La **MMR** montre que le facteur de correction ψ est, dans tous les cas, inférieur à l'unité.

6) Si l'on affectait à présent, au modèle rugueux de référence, un diamètre $\overline{D}$ égal à :

$$\frac{D}{\psi} = \frac{1,6}{0,705946727} = 2,266459974\,m \cong 2,266\,m$$

alors son paramètre de forme $\overline{\eta}$ deviendrait égal à celui de la conduite considérée, soit : $\overline{\eta} = \eta$.

La valeur du paramètre de forme $\overline{\eta} = \eta$ est obtenue par la résolution de l'équation (13) pour le débit relatif :

$$\overline{Q}_D^* = \frac{Q}{\sqrt{gJ\,(D/\psi)^5}} = \frac{3,013}{\sqrt{9,81\times 2.10^{-4}\times 2,266459974^5}} = 8,795884049$$

Puisque $\overline{Q}_D^* = 8,795884049 < (1+\pi/4)6\sqrt{3}$, alors la racine réelle de l'équation (13) est donnée par les relations (18) et (19). Ainsi :

$$ch(\beta)=\frac{(1+\pi/4)6\sqrt{3}}{\overline{Q}_D^*}=\frac{(1+\pi/4)\times 6\times\sqrt{3}}{8,795884049}=2{,}109441402$$

soit :

$\beta = 1,37795715$ radian.

Par suite :

$$\overline{\eta}=\eta=C_0+\frac{\overline{Q}_D^*}{4\sqrt{3}}ch(\beta/3)=0{,}107300918+\frac{8,795884049}{4\times\sqrt{3}}ch(1{,}37795715/3)$$
$$=1,513172392\cong 1,513$$

La dimension linéaire verticale $\overline{Y}$ du modèle rugueux de référence est :

$$\overline{Y}=\frac{D}{\psi}\overline{\eta}=2,266459974\times 1,513172392=3,42954466\,m\cong 3,43\,m$$

7) Ainsi, la valeur recherchée de la dimension linéaire verticale Y de la conduite considérée est :

$$Y=D\eta=1,6\times 1,513172392=2,421075827\,m\cong 2,421\,m$$

8) Tous ces résultats peuvent être schématisés (Figure 2) à titre de comparaison entre les dimensions linéaires de la conduite considérée et celles de son modèle rugueux de référence.

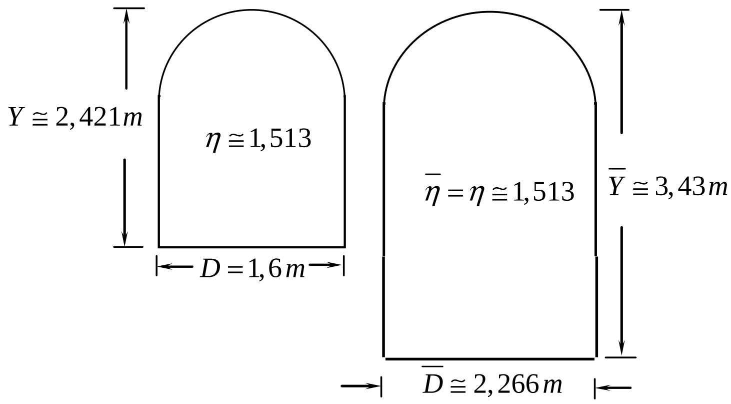


Figure 2 : Comparaison entre les dimensions linéaires de la conduite considérée (*a*) et celles de son modèle rugueux de référence (*b*), pour la même valeur du paramètre de forme η.

d) Vérifications des calculs

i. Selon la relation de *Darcy-Weisbach*, le gradient de la perte de charge linéaire J est :

$$J=\frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} \qquad (24)$$

où f désigne le coefficient de frottement. Celui-ci est donné par la relation :

$$f = \frac{\psi^5}{16} \tag{25}$$

Soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,705946727^5}{16} = 0,010958211$$

L'aire de la section mouillée A est, en vertu de la relation (3) :

$$A = D^2\left(\eta - C_0\right) = 1,6^2 \times (1,513172392 - 0,107300918) = 3,599030973\,m^2 \cong 3,6\,m^2$$

Le périmètre mouillé P est, selon la relation (4) :

$$P = 2D\left(\eta + \frac{\pi}{4}\right) = 2\times 1,6 \times \left(1,513172392 + \frac{\pi}{4}\right) = 7,355425777\,m$$

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est par suite :

$$R_h = \frac{3,599030973}{7,355425777} = 0,489302874\,m$$

Ainsi, le diamètre hydraulique est :

$$D_h = 4R_h = 4\times 0,489302874 = 1,957211496\,m$$

Ainsi, le gradient de la perte de charge linéaire J est, selon la relation (24) :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,010958211}{1,957211496} \times \frac{3,013^2}{2\times 9,81 \times 3,599030973^2} = 2.10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

ii. La formule générale du débit est, selon *Achour* et *Bedjaoui* (*Achour* and *Bedjaoui*, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g}\,A\sqrt{R_h J}\,\log\left(\frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\overline{R}}\right) \tag{26}$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (26), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ s'exprime par :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \tag{27}$$

La relation (26) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est, selon la relation (27) :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{9,81\times 2.10^{-4}\times 0,489302874^3}}{10^{-6}} = 686090,0606$$

Ainsi, le débit volume Q est en vertu de la relation (26) :

$$Q = -4\times\sqrt{2\times 9,81}\times 3,599030973\times\sqrt{0,489302874\times 2.10^{-4}}\times\log\left(\frac{10,04}{686090,0606}\right)$$
$$\cong 3,05\,m^3/s$$

Nous pouvons conclure que la valeur ainsi calculée du débit volume correspond, avec un écart relatif de 1,2% seulement, à celle donnée à l'énoncé de l'exemple considéré.

iii. Selon la relation de *Chézy*, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \tag{28}$$

où $C(m^{0,5}/s)$ est le coefficient de résistance de *Chézy*. Le coefficient C est lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ par la relation (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{29}$$

Soit :

$$C = \frac{8\times\sqrt{2\times 9,81}}{0,705946727^{5/2}} = 84,62714046\,m^{0,5}/s \cong 85\,m^{0,5}/s$$

Le débit volume Q est par suite, selon la relation (28) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} = 84,62714046\times 3,599030973\times\sqrt{0,489302874\times 2.10^{-4}} = 3,013\,m^3/s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.