Considérations théoriques/Exercice n° 4

1) Soit la conduite en charge en forme de voûte représentée par la figure 1. Elle écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν, sous un gradient J de la perte de charge linéaire. Sa paroi interne est caractérisée par une rugosité absolue ε. La forme de la conduite est définie par le paramètre de forme $\eta_V = Y/D$, où Y est la hauteur de la conduite et D est le diamètre du toit voûté. L'indice « V » se rapporte à la forme voûtée de la conduite.

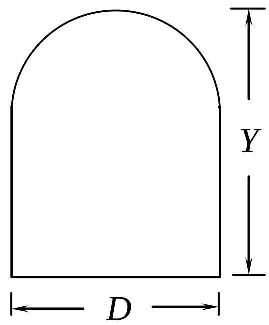

Figure 1 : Schéma de définition de la conduite en charge en forme de voûte

On définit pour cette conduite un modèle rugueux de référence de même forme et dont les principales caractéristiques sont :

- La hauteur $\overline{Y} = Y$
- Le diamètre $\overline{D}$
- Le paramètre de forme $\overline{\eta_V} = \overline{Y}/\overline{D} = Y/\overline{D}$
- Le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$
- Le débit volume $\overline{Q} = Q$
- Le débit relatif $\overline{Q}^* = Q/\sqrt{g\overline{J}\overline{Y}^5} = Q^*$

Il a été démontré, au cours de l'exemple d'application n°3 (fichier à télécharger), que le débit relatif $\overline{Q}^*$ était lié au paramètre de forme $\overline{\eta_V}$ par une relation implicite vis-à-vis de $\overline{\eta_V}$ et qui s'écrit :

$$\overline{Q}^* = \frac{8\left(\overline{\eta_V} - C_0\right)^{3/2}}{\left(\overline{\eta_V} + \pi/4\right)^{1/2} \overline{\eta_V}^{5/2}} \tag{1}$$

où C_0 est une constante telle que :

$$C_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}107300918 \tag{2}$$

On définit d'autre part une conduite en charge de forme rectangulaire de hauteur B et de largeur b , écoulant un débit volume Q_0 sous un gradient de la perte de charge linéaire J égal à celui de la conduite voûtée. Le modèle rugueux de référence de cette conduite possède les caractéristiques suivantes :

- La hauteur $\overline{B} = \overline{Y} = Y$ (3)
- La largeur $\overline{b} = \overline{D}\left(1 - C_0 \overline{\eta_V}^{-1}\right)$ (4)
- Le paramètre de forme $\overline{\eta_R} = \overline{b} / \overline{B}$ (5)

  où l'indice « R » désigne la forme rectangulaire.
- Le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$ (6)
- Le débit volume $\overline{Q_0} = Q_0 = 0,965Q$ (7)

  Ainsi, le modèle rugueux de référence de forme rectangulaire que nous venons de définir écoule 96,5% du débit volume de la conduite en charge en forme de voûte.
- Le débit relatif $\overline{Q_0}^* = Q_0 / \sqrt{g\overline{J}\overline{B}^5} = Q_0 / \sqrt{gJ\overline{Y}^5} = Q_0 / \sqrt{gJY^5} = Q_0^*$ (8)

2) En tenant compte des relations (3), (4) et (5), nous pouvons aisément écrire que :

$$\overline{\eta_R} = \overline{b} / \overline{B} = \frac{\overline{D}\left(1 - C_0 \overline{\eta_V}^{-1}\right)}{Y}$$

soit :

$$\overline{\eta_R} = \frac{\left(1 - C_0 \overline{\eta_V}^{-1}\right)}{\overline{\eta_V}} \tag{9}$$

La relation (9) devient, après réarrangements :

$$\overline{\eta_V}^2 - \frac{\overline{\eta_V}}{\overline{\eta_R}} + \frac{C_0}{\overline{\eta_R}} = 0 \tag{10}$$

Nous obtenons ainsi une équation du second degré en $\overline{\eta_V}$ dont la seule racine réelle à retenir est :

$$\overline{\eta_V} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4C_0 \overline{\eta_R}}}{2\overline{\eta_R}} \tag{11}$$

Lorsque le modèle rugueux de référence en forme de voûte se réduit au demi-cercle de diamètre $\overline{D}$, son paramètre de forme est :

$$\overline{\eta_V} = 1/2 \tag{12}$$

Pour ce cas bien particulier, la relation (10) permet de déduire que pour $\overline{\eta_V} = 1/2$:

$$\overline{\eta_R} = 4\left(\frac{1}{2} - C_0\right) \qquad (13)$$

ou bien, en tenant compte de la relation (2) :

$$\overline{\eta_R} = 4\left(\frac{1}{2} - C_0\right) = 4 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$$

soit :

$$\overline{\eta_R} = \frac{\pi}{2} \cong 1{,}5708 \qquad (14)$$

3) Le paramètre de forme $\overline{\eta_R}\left(Q_0^*\right)$ du modèle rugueux de référence de section rectangulaire est régi par une équation de troisième degré qui s'écrit (*Dimensionnement d'une conduite en charge de forme rectangulaire, Exercice n°1, Relation 13,* fichier disponible sur www.larhyss.org) :

$$\overline{\eta_R}^3 - \frac{Q_0^{*2}}{64}\overline{\eta_R} - \frac{Q_0^{*2}}{64} = 0 \qquad (15)$$

Nous pouvons ainsi conclure que si :

i. $Q_0^* \le 12\sqrt{3}$,

alors la racine réelle de l'équation (15) est :

$$\overline{\eta_R} = \frac{Q_0^*}{4\sqrt{3}} ch(\beta / 3) \qquad (16)$$

où l'angle β est tel que :

$$ch(\beta) = \frac{12\sqrt{3}}{Q_0^*} \qquad (17)$$

ii. $Q_0^* \ge 12\sqrt{3}$,

alors la racine réelle de l'équation (15) est :

$$\overline{\eta_R} = \frac{Q_0^*}{4\sqrt{3}} \cos(\beta / 3) \qquad (18)$$

où l'angle β est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{12\sqrt{3}}{Q_0^*} \qquad (19)$$

4) On souhaite déterminer la dimension linéaire D de la conduite en charge en forme de voûte représentée par la figure 1. Utiliser pour cela la **MMR** en vous aidant des considérations théoriques ci-dessus exposées.

On donne :

$Q = 4m^3/s$; $J = 2.10^{-3}$; $Y = 1,77\,m$; $\varepsilon = 2.10^{-4}m$; $\nu = 10^{-6}m^2/s$.

i. Les données du problème sont telles que le débit relatif Q_0^* est :

$$Q_0^* = \frac{Q_0}{\sqrt{gJ\overline{Y}^5}} = \frac{0,965Q}{\sqrt{gJY^5}} = \frac{0,965\times 4}{\sqrt{9,81\times 2.10^{-3}\times 1,77^5}} = 6,611570561$$

Puisque $Q_0^* < 12\sqrt{3}$, alors le paramètre de forme $\overline{\eta_R}$ est donné par les relations (16) et (17). Selon la relation (17), l'angle β est tel que :

$$ch(\beta) = \frac{12\sqrt{3}}{Q_0^*} = \frac{12\times\sqrt{3}}{6,611570561} = 3,143672067$$

soit : $\beta = 1,81222423$ radian

Le paramètre de forme $\overline{\eta_R}$ est donc, en vertu de la relation (16) :

$$\overline{\eta_R} = \frac{Q_0^*}{4\sqrt{3}}ch(\beta/3) = \frac{6,611570561}{4\times\sqrt{3}}ch(1,81222423/3) = 1,133772138$$

ii. Les caractéristiques du modèle rugueux de référence de forme rectangulaire sont, en particulier :

- Le périmètre mouillé :

$$\overline{P_R} = 2\left(\overline{b}+\overline{B}\right) = 2\overline{B}\left(\overline{\eta_R}+1\right) = 2Y\left(\overline{\eta_R}+1\right)$$

soit :

$$\overline{P_R} = 2\times 1,77\times\left(1,133772138+1\right) = 7,553553368\,m$$

- L'aire de la section mouillée :

$$\overline{A_R} = \overline{b}\,\overline{B} = \overline{B}^2\overline{\eta_R} = Y^2\overline{\eta_R}$$

soit :

$$\overline{A_R} = 1,77^2\times 1,133772138 = 3,551994731\,m^2$$

Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface
Université de Biskra, BP 145 RP 07000, Biskra, Algérie.
www.larhyss.org, info@larhyss.net

- Le diamètre hydraulique :

$$\overline{D_{h,R}} = 4\frac{\overline{A_R}}{\overline{P_R}}$$

soit :

$$\overline{D_{h,R}} = 4\times\frac{3,551994731}{7,553553368} = 1,880966246\,m$$

- Le nombre de *Reynolds* de l'écoulement :

$$\overline{R_R} = \frac{4Q_0}{\overline{P_R}\,\nu} = \frac{4\times 0,965Q}{\overline{P_R}\,\nu}$$

soit :

$$\overline{R_R} = \frac{4\times 0,965\times 4}{7,553553368\times 10^{-6}} = 2044071,081$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est alors :

$$\psi = 1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_{h,R}}}{4,75}+\frac{8,5}{\overline{R_R}}\right)\right]^{-2/5} \quad (20)$$

soit :

$$\psi = 1,35\times\left[-\log\left(\frac{2.10^{-4}/1,880966246}{4,75}+\frac{8,5}{2044071,081}\right)\right]^{-2/5} = 0,73474669$$

iv. Si 'on affectait à présent au modèle rugueux de référence de forme rectangulaire la dimension verticale :

$$\frac{Y}{\psi} = \frac{1,77}{0,73474669} = 2,408993501\,m \quad (20)$$

alors nous obtiendrions $\overline{\eta_R} = \eta_R$ et $\overline{\eta_V} = \eta_V$. La relation (11) peut alors s'écrire :

$$\eta_V = \frac{1+\sqrt{1-4C_0\eta_R}}{2\eta_R} \quad (22)$$

v. Pour la nouvelle dimension verticale définie par la relation (20), le débit relatif Q_0^* est :

$$Q_0^* = \frac{Q_0}{\sqrt{gJ(Y/\psi)^5}} = \frac{0,965Q}{\sqrt{gJ(Y/\psi)^5}} = \frac{0,965\times 4}{\sqrt{9,81\times 2.10^{-3}\times 2,408993501^5}} = 3,059487847$$

Puisque $Q_0^* < 12\sqrt{3}$, alors le paramètre de forme $\overline{\eta_R}$ est donné par les relations (16) et (17). Selon la relation (17), l'angle β est tel que :

$$ch(\beta) = \frac{12\sqrt{3}}{Q_0^*} = \frac{12\times\sqrt{3}}{3,059487847} = 6,793493137$$

soit : $\beta = 2,603650954$ radians

Le paramètre de forme η_R est donc, en vertu de la relation (16) :

$$\eta_R = \frac{Q_0^*}{4\sqrt{3}} ch(\beta/3) = \frac{3,059487847}{4\times\sqrt{3}} ch(2,603650954/3) = 0,618614843$$

vi. La relation (22) permet alors de déduire que le paramètre de forme η_V de la conduite en charge en forme de voûte est :

$$\eta_V = \frac{1+\sqrt{1-4C_0\eta_R}}{2\eta_R} = \frac{1+\sqrt{1-4\times0,107300918\times0,618614843}}{2\times0,618614843} = 1,500952419 \cong 1,5$$

Par suite, la dimension linéaire D recherchée est :

$$D = \frac{Y}{\eta_V} = \frac{1,77}{1,500952419} = 1,179251239\,m \cong 1,18\,m$$

vii. **Vérification des calculs par la relation de *Darcy-Weisbach***

Selon *Darcy-Weisbach*, le gradient J de la perte de charge linéaire est donné par la relation :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} \tag{23}$$

où f désigne le coefficient de frottement.

Pour les dimensions linéaires Y et D que nous venons de calculer, l'aire de la section mouillée A_V est donc :

$$A_V = D^2(\eta_V - C_0) = 1,179251239^2 \times (1,500952419 - 0,107300918) = 1,93805844\,m^2$$

Le périmètre mouillé P_V est tel que :

$$P_V = 2D\left(\eta_V + \frac{\pi}{4}\right) = 2\times1,179251239\times\left(1,500952419 + \frac{\pi}{4}\right) = 5,39236351\,m$$

Le rayon hydraulique $R_{h,V} = A_V / P_V$ est par suite :

$$R_{h,V} = \frac{1,93805844}{5,39236351} = 0,35940797\,m \cong 0,36\,m$$

Ainsi, le diamètre hydraulique est :

$$D_{h,V} = 4R_{h,V} = 4\times 0,35940797 = 1,43763189\,m \cong 1,438\,m$$

Le nombre de *Reynolds* R_V de l'écoulement dans la conduite est :

$$R_V = \frac{4Q}{P_V\,\nu} = \frac{4\times 4}{5,39236351\times 10^{-6}} = 2967159,012$$

Selon *Achour et Bedjaoui* (*Achour et Bedjaoui, Note Tehnique, Larhyss/Journal, n°5, 2006, p.197-200*, Fichier disponible sur www.larhyss.org), le nombre de *Reynolds* $\overline{R_V}$ de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence de la conduite considérée est donné par la relation :

$$\overline{R_V} = 2R_V\left[-\log\left(\frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{5,5}{R_V^{0,9}}\right)\right]^{-1} \qquad (24)$$

La relation (24) est applicable à toutes les formes de conduites usuelles, en charge ou à surface libre. Elle couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Pour la conduite considérée, la relation (24) permet d'écrire que :

$$\overline{R_V} = 2\times 2967159,012\times\left[-\log\left(\frac{2.10^{-4} / 1,43763189}{3,7} + \frac{5,5}{2967159,012^{0,9}}\right)\right]^{-1} = 1367706,727$$

Le coefficient de frottement f de la relation (23) est (*Achour et Bedjaoui, Note Tehnique, Larhyss/Journal, n°5, 2006, p.197-200*, Fichier disponible sur www.larhyss.org) :

$$f = \left[-2\log\left(\frac{\varepsilon / D_{h,V}}{3,7} + \frac{10,04}{\overline{R_V}}\right)\right]^{-2} \qquad (25)$$

La relation (24) couvre tout le domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Ainsi :

$$f = \left[-2\times\log\left(\frac{2.10^{-4} / 1,43763189}{3,7} + \frac{10,04}{1367706,727}\right)\right]^{-2} = 0,013227801$$

Finalement, le gradient de la perte de charge linéaire J est, selon la relation (23) :

$$J = \frac{f}{D_{h,V}}\frac{Q^2}{2gA_V^{\;2}} = \frac{0,013227801}{1,43763189}\times\frac{4^2}{2\times 9,81\times 1,93805844^2} = 0,00199769 \cong 2.10^{-3}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.