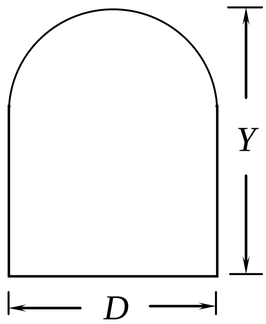
Considérations théoriques/Exercice n° 3

Soit la conduite en charge en forme de voûte représentée par la figure ci-dessous. Elle écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν, sous un gradient de la perte de charge linéaire J. Sa paroi interne est caractérisée par une rugosité absolue ε. La forme de la conduite est définie par le paramètre de forme $\eta = Y / D$, où Y est la hauteur de la conduite et D est le diamètre du toit voûté.
On souhaite déterminer la dimension linéaire D pour les valeurs connues des paramètres Q, J, Y, ε et ν.



a) Exprimer les principales caractéristiques de la conduite.

b) En ayant recours à la **MMR**, donner l'expression du débit relatif $\overline{Q}^* = \overline{Q} / \sqrt{g\overline{J}\overline{Y}^5}$ en fonction du paramètre de forme $\overline{\eta}$ du modèle rugueux de référence.

c) Déterminer la dimension linéaire D, pour les données suivantes :

$Q = 6,92\,m^3/s$; $Y = 2\,m$; $J = 2.10^{-3}$; $\varepsilon = 2.10^{-4}\,m$; $\nu = 10^{-6}\,m^2/s$

d) Pour la dimension linéaire D ainsi obtenue, vérifier les calculs en déterminant :

i. Le gradient J de la perte de charge linéaire selon *DarcyWeisbach*.

ii. Le débit volume Q par application de la relation générale.

iii. Le débit volume Q par application de la formule de *Chézy*.

Solution

a) La conduite en charge étant caractérisée par les dimensions linéaires Y et D, l'aire de la section mouillée A est la somme de l'aire de la section rectangulaire de hauteur $(Y - D/2)$ et de la largeur D, et de l'aire de la section semi-circulaire de diamètre D. Ainsi :

$$A = (Y - D/2)D + \pi D^2/8$$

soit :

$$A = D^2\left(\frac{Y}{D} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (1)$$

En désignant par C_0, la constante :

$$C_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}107300918 \quad (2)$$

la relation (1) s'écrit :

$$A(D,\eta) = D^2(\eta - C_0) \quad (3)$$

ou bien, en tenant compte du fait que $D = Y/\eta$:

$$A(Y,\eta) = Y^2\left(\frac{\eta - C_0}{\eta^2}\right) \quad (4)$$

Le périmètre mouillé P s'obtient en faisant la somme du périmètre de la partie rectangulaire de la conduite et de celui de demi-cercle constituant le toit voûté, soit :

$$P = 2\left(Y - \frac{D}{2}\right) + D + \frac{\pi D}{2}$$

soit :

$$P(D,\eta) = 2D\left(\eta + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5)$$

ou bien, en tenant compte du fait que $D = Y/\eta$:

$$P(Y,\eta) = 2Y\frac{(\eta + \pi/4)}{\eta} \quad (6)$$

Le diamètre hydraulique $D_h = 4A/P$ est par suite :

$$D_h(D,\eta) = 4\frac{D^2(\eta - C_0)}{2D\left(\eta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

soit :

$$D_h(D,\eta) = 2D\frac{(\eta - C_0)}{\left(\eta + \frac{\pi}{4}\right)} \quad (7)$$

Le diamètre hydraulique peut également s'écrire :

$$D_h(Y,\eta) = 2Y\frac{(\eta - C_0)}{\eta\left(\eta + \dfrac{\pi}{4}\right)} \qquad (8)$$

b) La **MMR** (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) se base sur la formule bien connue de *Darcy-Weisbach*. Appliquée au modèle rugueux de référence, celle-ci s'écrit :

$$\overline{J} = \frac{1}{128g}\frac{\overline{P}}{\overline{A}^3}\overline{Q}^2 \qquad (9)$$

L'aire $\overline{A}$ et le périmètre mouillé $\overline{P}$ du modèle rugueux sont donnés respectivement par les relations (4) et (6) de sorte que :

$$\overline{A} = \overline{Y}^2\left(\frac{\overline{\eta} - C_0}{\overline{\eta}^2}\right) \qquad (10)$$

$$\overline{P} = 2\overline{Y}\frac{\left(\overline{\eta} + \pi/4\right)}{\overline{\eta}} \qquad (11)$$

En tenant compte des relations (10) et (11), la relation (9) devient :

$$\overline{J} = \frac{1}{128g}\frac{2\overline{Y}\left(\overline{\eta} + \pi/4\right)}{\overline{\eta}\left[\overline{Y}^2\left(\dfrac{\overline{\eta} - C_0}{\overline{\eta}^2}\right)\right]^3}\overline{Q}^2$$

ou bien :

$$\overline{J} = \frac{1}{64}\frac{\left(\overline{\eta} + \dfrac{\pi}{4}\right)\overline{\eta}^5}{\left(\overline{\eta} - C_0\right)^3}\left(\frac{\overline{Q}^2}{g\overline{Y}^5}\right) \qquad (12)$$

Ceci permet de déduire que :

$$\left(\frac{\overline{Q}^2}{g\overline{J}\,\overline{Y}^5}\right) = \overline{Q}^{*2} = \frac{64\left(\overline{\eta} - C_0\right)^3}{\left(\overline{\eta} + \pi/4\right)\overline{\eta}^5}$$

soit :

$$\overline{Q}^* = \frac{8\left(\overline{\eta}-C_0\right)^{3/2}}{\left(\overline{\eta}+\pi/4\right)^{1/2}\overline{\eta}^{-5/2}} \tag{13}$$

Le paramètre de forme $\overline{\eta}$ est, selon la relation (13), une fonction implicite du débit relatif $\overline{Q}^*$.

L'application du théorème de *Lagrange* à la relation (13) peut conduire à la solution exacte $\overline{\eta}(\overline{Q}^*)$. Mais celle-ci sera obtenue en termes d'une série illimitée dont l'application n'est pas pratique lorsqu'elle est destinée à l'usage de l'ingénieur. Les méthodes approximatives demeurent alors les plus intéressantes à condition qu'elles soient d'une précision acceptable. Dans le cas de la relation (13), la méthode approchée suivante peut être proposée pour la détermination explicite de $\overline{\eta}(\overline{Q}^*)$. Elle consiste à tracer, dans un premier temps, la variation du paramètre de forme $\overline{\eta}$ en fonction du débit relatif $\overline{Q}^*$. Dans un second temps, une courbe de tendance est recherchée par application de la méthode des moindres carrés non linéaires. Il a été observé que la relation (13) pouvait être remplacée, avec une excellente approximation, par la relation :

$$\overline{\eta} = \frac{3,7704 - 0,1314\overline{Q}^*}{\overline{Q}^{*\,0,7}} \tag{14}$$

La relation (14) a été obtenue dans la large gamme $1,3 \le \overline{Q}^* \le 9,8$, correspondant à $0,5 \le \overline{\eta} \le 3$. Dans cette gamme, l'application de la relation (14) n'occasionne qu'une erreur relative maximale de l'ordre de 0,2% seulement (Figure 1) lorsqu'elle est comparée à la relation exacte (13).

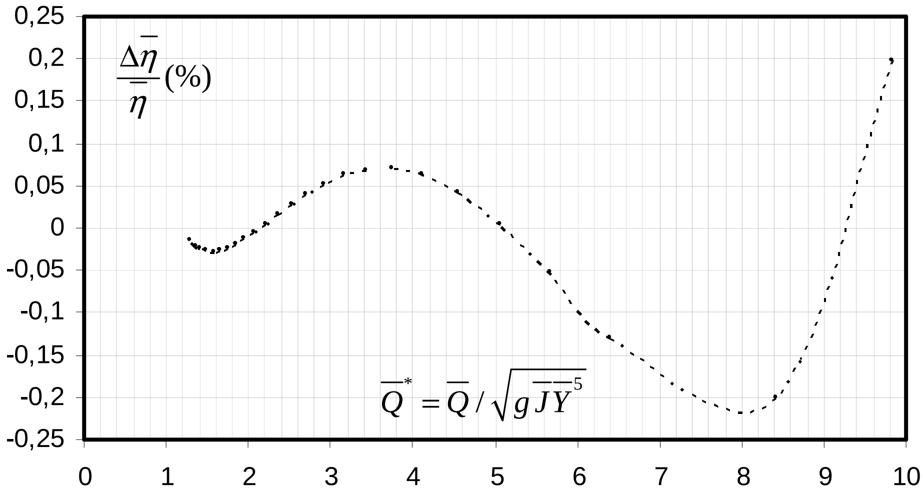


Figure 1 : Ecarts relatifs $\Delta\overline{\eta}/\overline{\eta}$ (%), calculés selon les relations (13) et (14), en fonction du débit relatif $\overline{Q}^*$.

c) Application

1) Admettons que le modèle rugueux de référence de la conduite considérée écoule le débit $\overline{Q} = Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$ et pour la dimension verticale $\overline{Y} = Y$.

2) Pour les données du problème, le débit relatif est tel que :

$$\overline{Q}^* = Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gJY^5}} = \frac{6,92}{\sqrt{9,81 \times 2.10^{-3} \times 2^5}} = 8,73336485$$

Le débit relatif ainsi calculé se situe bien dans la gamme $1,3 \le \overline{Q}^* \le 9,8$.

3) Pour ce débit relatif, la relation (14) permet de déterminer, de manière explicite, une valeur approchée du paramètre de forme $\overline{\eta}$ du modèle rugueux de référence, soit :

$$\overline{\eta} = \frac{3,7704 - 0,1314\overline{Q}^*}{\overline{Q}^{*\,0,7}} = \frac{3,7704 - 0,1314 \times 8,73336485}{8,73336485^{0,7}} = 0,57536573$$

4) Les caractéristiques du modèle rugueux de référence sont alors, en particulier :

- L'aire de la section mouillée $\overline{A}$, telle que, selon la relation (10) :

$$\overline{A} = \overline{Y}^2\left(\frac{\overline{\eta} - C_0}{\overline{\eta}^2}\right) = Y^2\left(\frac{\overline{\eta} - C_0}{\overline{\eta}^2}\right) = 2^2 \times \left(\frac{0,57536573 - 0,107300918}{0,57536573^2}\right) = 5,65559111\,m^2$$

- Le périmètre mouillé $\overline{P}$, tel que, en vertu de la relation (11) :

$$\overline{P} = 2\overline{Y}\frac{(\overline{\eta} + \pi/4)}{\overline{\eta}} = 2Y\frac{(\overline{\eta} + \pi/4)}{\overline{\eta}} = 2 \times 2 \times \frac{(0,57536573 + \pi/4)}{0,57536573} = 9,46016646\,m$$

- Le diamètre hydraulique $\overline{D_h}$, tel que :

$$\overline{D_h} = 4\overline{A}/\overline{P} = 4 \times 5,65559111/9,46016646 = 2,39132837\,m$$

- Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$, tel que :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu} = \frac{4Q}{\overline{P}\nu} = \frac{4 \times 6,92}{9,46016646 \times 10^{-6}} = 2925952,74$$

5) Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est :

$$\psi = 1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_h}}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5} \tag{15}$$

Soit :

$$\psi = 1,35 \times \left[-\log\left(\frac{2.10^{-4}/2,39132837}{4,75} + \frac{8,5}{2925952,74} \right) \right]^{-2/5} = 0,72767831$$

La relation (15) couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*, sans aucune restriction. Elle s'applique à toutes les formes usuelles de conduites et canaux, en charge et à surface libre. La **MMR** montre que le facteur de correction ψ est, dans tous les cas, inférieur à l'unité.

6) Si l'on affectait à présent, au modèle rugueux de référence, la dimension linéaire $\overline{Y}$ égale à :

$$\frac{Y}{\psi} = \frac{2}{0,72767831} = 2,74846726\,m \cong 2,75\,m$$

alors le paramètre de forme $\overline{\eta}$ serait égal au paramètre de forme η de la conduite considérée. Pour cette nouvelle valeur de $\overline{Y}$, le débit relatif est :

$$\overline{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{gJ(Y/\psi)^5}} = \frac{6,92}{\sqrt{9,81 \times 2.10^{-3} \times 2,74846726^5}} = 3,9448471$$

Le débit relatif ainsi calculé appartient aussi à la gamme $1,3 \leq \overline{Q}^* \leq 9,8$. Le paramètre de forme $\overline{\eta}$ qui lui est associé est défini par la relation (14), soit :

$$\overline{\eta} = \eta = \frac{3,7704 - 0,1314\overline{Q}^*}{\overline{Q}^{*\,0,7}} = \frac{3,7704 - 0,1314 \times 3,9448471}{3,9448471^{0,7}} = 1,24433038 \cong 1,245$$

7) La dimension linéaire D recherchée est par suite :

$$D = \frac{Y}{\eta} = \frac{2}{1,24433038} = 1,607290183\,m \cong 1,61\,m$$

d) Vérifications des calculs

i. Selon la relation de *Darcy-Weisbach*, le gradient de la perte de charge linéaire J est :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} \quad (16)$$

où f désigne le coefficient de frottement. Celui-ci est donné par la relation :

$$f = \frac{\psi^5}{16} \quad (17)$$

Soit :

$$f=\frac{\psi^5}{16}=\frac{0,72767831^5}{16}=0,012751966$$

L'aire de la section mouillée A est, en vertu de la relation (3) :

$$A=D^2\left(\eta-C_0\right)=1,607290183^2\times(1,24433038-0,107300918)=2,937381133\,m^2$$
$$\cong 2,938\,m^2$$

Le périmètre mouillé P est, selon la relation (4) :

$$P=2D\left(\eta+\frac{\pi}{4}\right)=2\times1,607290183\times\left(1,24433038+\frac{\pi}{4}\right)=6,524725515\,m$$

Le rayon hydraulique $R_h=A/P$ est par suite :

$$R_h=\frac{2,937381133}{6,524725515}=0,450192292\,m\cong 0,45\,m$$

Ainsi, le diamètre hydraulique est :

$$D_h=4R_h=4\times0,450192292=1,800769167\,m\cong1,80\,m$$

Ainsi, le gradient de la perte de charge linéaire J est, selon la relation (24) :

$$J=\frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2}=\frac{0,012751966}{1,800769167}\times\frac{6,92^2}{2\times9,81\times2,937381133^2}=2.10^{-3}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

ii. La formule générale du débit est, selon *Achour* et *Bedjaoui* (*Achour* and *Bedjaoui*, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q=-4\sqrt{2g}\,A\sqrt{R_hJ}\,\log\left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8}+\frac{10,04}{\overline{R}}\right) \tag{18}$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (18), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ s'exprime par :

$$\overline{R}=32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \tag{19}$$

La relation (18) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est, selon la relation (19) :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{9,81\times 2.10^{-3}\times 0,450192292^3}}{10^{-6}} = 1914747,715$$

Ainsi, le débit volume Q est en vertu de la relation (18) :

$$Q = -4\times\sqrt{2\times 9,81}\times 2,937381133\times\sqrt{0,450192292\times 2.10^{-3}}\times$$
$$\log\left(\frac{2.10^{-4}/0,450192292}{14,8}+\frac{10,04}{1914747,715}\right)\cong 6,953\,m^3/s$$

Nous pouvons conclure que la valeur ainsi calculée du débit volume correspond, avec un écart relatif de moins de 0,5% seulement, à celle donnée à l'énoncé de l'exemple considéré.

iii. Selon la relation de *Chézy*, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \tag{20}$$

où $C(m^{0,5}/s)$ est le coefficient de résistance de *Chézy*. Le coefficient C est lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ par la relation (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{21}$$

Soit :

$$C = \frac{8\times\sqrt{2\times 9,81}}{0,72767831^{5/2}} = 78,44963328\,m^{0,5}/s \cong 78,5\,m^{0,5}/s$$

Le débit volume Q est par suite, selon la relation (20) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} = 78,44963328\times 2,937381133\times\sqrt{0,450192292\times 2.10^{-3}} \cong 6,914\,m^3/s$$

Le débit ainsi calculé correspond, avec un écart relatif de moins de 0,08% seulement, à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.