Considérations théoriques/Exercice n° 1

1) Définition

Soit la conduite en charge en forme de fer à cheval représentée par la figure 1. Elle écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν, sous un gradient de la perte de charge linéaire J. Sa paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue ε. La conduite est définie par ses dimensions linéaires $Y = D$ et y, où D est le diamètre du cercle de centre O et de rayon $\overleftrightarrow{OE} = \overleftrightarrow{OC} = \overleftrightarrow{OB} = \overleftrightarrow{OG}$.

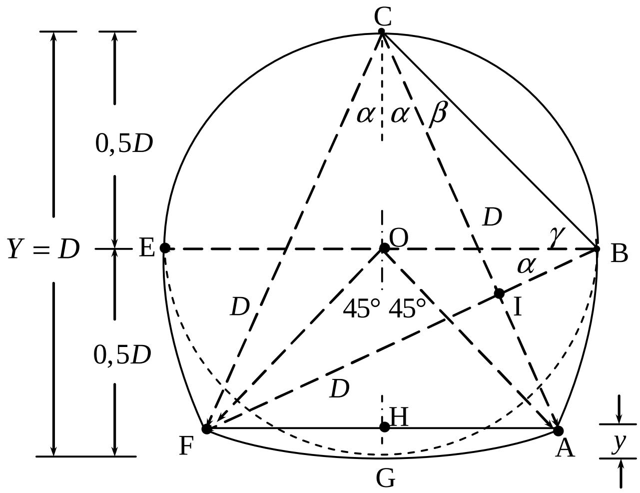

Figure 1 : Schéma de définition de la conduite en charge en forme de fer à cheval

2) Etapes constructives du profil de la conduite

Les étapes constructives du profil de la conduite considérée peuvent être résumées ainsi.

Tracer :

i. Le cercle de centre O et de diamètre D.

ii. Le segment $\overleftrightarrow{OF}$ incliné d'un angle de 45° par rapport à la verticale OG.

iii. L'arc de cercle $\overset{\frown}{EF}$ appartenant au cercle de centre B et de diamètre $2D$.

iv. L'arc de cercle $\overset{\frown}{BA}$ appartenant au cercle de centre E et de diamètre $2D$.

v. L'arc de cercle $\overset{\frown}{FGA}$ appartenant au cercle de centre C et de diamètre $2D$.

3) Considérations géométriques

i. Le triangle droit et isocèle $\vartriangle \mathrm{COB}$ suggère les points suivants :

- $\overleftrightarrow{\mathrm{CB}}^2 = \overleftrightarrow{\mathrm{CO}}^2 + \overleftrightarrow{\mathrm{OB}}^2 = (D/2)^2 + (D/2)^2 = D^2/2$

Soit :

$$\overleftrightarrow{\mathrm{CB}} = \frac{\sqrt{2}}{2} D \tag{1}$$

- $$\gamma = 45^\circ \tag{2}$$

- $$\alpha + \beta = 45^\circ \tag{3}$$

ii. Le triangle droit $\vartriangle \mathrm{CIB}$ permet d'écrire que :

$$\cos(\beta) = \frac{\overleftrightarrow{\mathrm{CI}}}{\overleftrightarrow{\mathrm{CB}}}$$

Soit, en tenant compte de la relation (1) et (3) :

$$\cos(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\frac{\overleftrightarrow{\mathrm{CI}}}{D} \tag{4}$$

iii. Le triangle droit $\vartriangle \mathrm{CIF}$ permet d'écrire que :

$$\cos(2\alpha) = \frac{\overleftrightarrow{\mathrm{CI}}}{\overleftrightarrow{\mathrm{CF}}} = \frac{\overleftrightarrow{\mathrm{CI}}}{D} \tag{5}$$

Tenant compte de la relation (4), la relation (5) devient :

$$\cos(2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \tag{6}$$

L'équation (6) est satisfaite pour :

$$\alpha = 24,295189^\circ \tag{7}$$

ou bien

$\alpha = 0,42403104$ radian

iv. En considérant le triangle droit $\triangle \mathrm{CHF}$, il vient que :

$$\sin(\alpha) = \frac{\overleftrightarrow{\mathrm{HF}}}{\overleftrightarrow{\mathrm{CF}}} = \frac{\overleftrightarrow{\mathrm{HF}}}{D} \tag{8}$$

Tenant compte de (7), la relation (8) permet de déduire que :

$$\overleftrightarrow{\mathrm{HF}} = D\sin(\alpha) = D\sin(24,295189)$$

soit :

$$\overleftrightarrow{\mathrm{HF}} = 0,41143783D \tag{9}$$

Ce résultat mène à écrire que :

$$\overleftrightarrow{\mathrm{FA}} = 2\overleftrightarrow{\mathrm{HF}} = 2 \times 0,41143783 \times D$$

ou bien :

$$\overleftrightarrow{\mathrm{FA}} = 0,82287566\,D \tag{10}$$

v. En considérant le triangle droit et isocèle $\triangle \mathrm{OHF}$, nous pouvons écrire que :

$$\overleftrightarrow{\mathrm{HF}} = \overleftrightarrow{\mathrm{OH}}$$

soit, en tenant compte de la relation (9) :

$$\overleftrightarrow{\mathrm{OH}} = 0,41143783D \tag{11}$$

vi. La dimension linéaire y s'écrit :

$$y = \overleftrightarrow{\mathrm{OG}} - \overleftrightarrow{\mathrm{OH}}$$

avec : $\overleftrightarrow{\mathrm{OG}} = D/2$

ou bien, compte tenu de la relation (11) :

$$y = 0,5D - 0,41143783D$$

soit :

$$y = 0,08856217D \tag{12}$$

vii. La longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ est telle que :

$$\overset{\frown}{\mathrm{EF}} = \overset{\frown}{\mathrm{FG}} = \overset{\frown}{\mathrm{GA}} = \overset{\frown}{\mathrm{AB}} \tag{13}$$

avec :

$$\overset{\frown}{\mathrm{EF}} = \alpha D \tag{14}$$

où l'angle α est exprimé en radian. Ainsi :

$$\overset{\frown}{\mathrm{EF}} = 0,42403104D$$

4) Caractéristiques de la conduite

Les caractéristiques de la conduite sont, en particulier :

i. L'aire de la section mouillée A égale à la somme des aires des sections :

- A_0 du demi-cercle ECBE de diamètre D, soit :

$$A_0 = \frac{\pi D^2}{8} \tag{15}$$

- A_1 du trapèze EBAFE, soit :

$$A_1 = \left(\overleftrightarrow{\mathrm{EB}} + \overleftrightarrow{\mathrm{FA}}\right)\frac{\overleftrightarrow{\mathrm{OH}}}{2}$$

avec :

$\overleftrightarrow{\mathrm{EB}} = D$, $\overleftrightarrow{\mathrm{FA}}$ et $\overleftrightarrow{\mathrm{OH}}$ étant régis respectivement par les relations (10) et (11). Ainsi :

$$A_1 = \left(D + 0,82287566\,D\right)\frac{0,41143783D}{2}$$

soit :

$$A_1 = 0,375D^2 \tag{16}$$

- $2\times A_2$, où A_2 est l'aire du segment circulaire d'angle au centre α, appartenant au cercle de centre B et de diamètre $2D$. Pour l'angle α exprimé en radian, A_2 s'écrit :

$$A_2 = \frac{(2D)^2}{4}\left[\alpha/2 - \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\right]$$
$$= \left[0,42403104/2 - \sin(0,42403104/2)\cos(0,42403104/2)\right]D^2$$

Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface
Université de Biskra, BP 145 RP 07000, Biskra, Algérie.
www.larhyss.org, info@larhyss.net

ou bien :

$$A_2 = 0,00629661 D^2 \tag{17}$$

- A_3 du segment circulaire de corde $\overleftrightarrow{\mathrm{FA}}$, d'angle au centre 2α, appartenant au cercle de centre C et de diamètre $2D$. Pour l'angle α exprimé en radiant, A_3 s'écrit :

$$A_3 = \frac{(2D)^2}{4}\left[\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] = \left[0,42403104 - \sin(0,42403104)\cos(0,42403104)\right] D^2$$

ou bien :

$$A_3 = 0,04903104 D^2 \tag{18}$$

Finalement, l'aire de la section mouillée A de la conduite considérée est :

$$A = A_0 + A_1 + 2A_2 + A_3 = (\pi D^2 / 8) + 0,375 D^2 + 2\times 0,00629661 D^2 + 0,04903104 D^2$$

soit :

$$A = 0,82932333 D^2 \tag{19}$$

ii. Le périmètre mouillé P, égal à la somme des longueurs de :

- P_0, périmètre du demi-cercle ECB de diamètre D :

$$P_0 = \frac{\pi D}{2} \tag{20}$$

Soit :

$$P_0 = 1,57079633 D \tag{21}$$

- $2\times P_1$, où P_1 est la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$, appartenant au cercle de centre B, d'angle au centre α et de diamètre $2D$, soit, pour l'angle α exprimé en radians :

$$P_1 = \alpha D \tag{22}$$

ou bien :

$$P_1 = 0,42403104 D \tag{23}$$

- P_2, longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{FA}}$, appartenant au cercle de centre C, d'angle au centre 2α et de diamètre $2D$. Pour l'angle α exprimé en radians, P_2 s'écrit :

$$P_2 = 2\alpha D \tag{24}$$

Soit :

$$P_2 = 2 \times 0,42403104 \times D$$

ou bien :

$$P_2 = 0,84806208\, D \tag{25}$$

Ainsi, le périmètre mouillé P recherché est :

$$P = P_0 + 2P_1 + P_2$$

soit :

$$P = 1,57079633\, D + 2 \times 0,42403104 D + 0,84806208\, D$$

ou bien :

$$P = 3,26692049\, D \tag{26}$$

iii. Le diamètre hydraulique est $D_h = 4A/P$, soit :

$$D_h = 4 \times \frac{0,82932333\, D^2}{3,26692049\, D}$$

soit :

$$D_h = 1,01541906\, D \tag{27}$$

5) Modèle rugueux de référence de la conduite

5.1) Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux de référence de la conduite en forme de fer à cheval est schématiquement représenté sur la figure 2. Il est défini par les dimensions linéaires horizontales $\overline{D}$ et $\overline{y}$.

Le modèle rugueux de référence écoule le débit volume $\overline{Q}$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J}$, d'un liquide de viscosité cinématique ν.

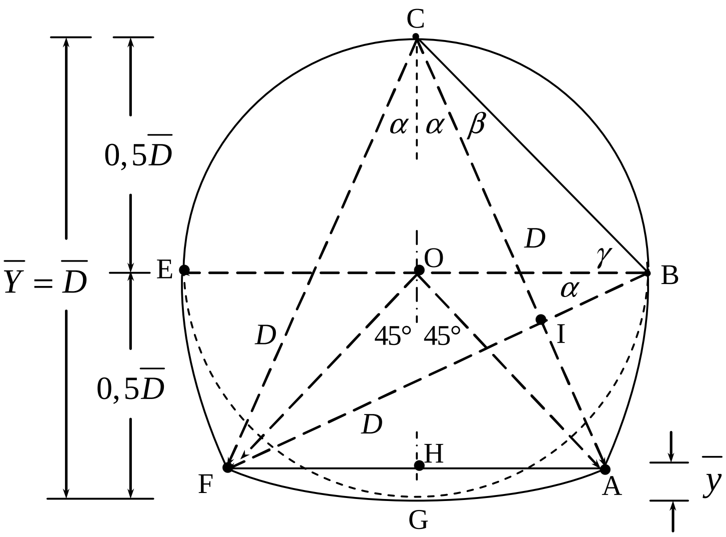

Figure 2 : Schéma de définition du modèle rugueux de la conduite en charge en forme de fer à cheval

Les caractéristiques du modèle rugueux de référence sont régies par des relations identiques à celles que nous avons précédemment établies, en particulier les relations (19), (26) et (27). Ainsi :

- L'aire de la section mouillée $\overline{A}$ est :

$$\overline{A} = 0,82932333\,\overline{D}^2 \tag{28}$$

- Le périmètre mouillé $\overline{P}$ s'écrit :

$$\overline{P} = 3,26692049\,\overline{D} \tag{29}$$

- Le diamètre hydraulique $\overline{D_h}$ s'exprime par :

$$\overline{D_h} = 1,01541906\,\overline{D} \tag{30}$$

5.2) Relation régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence

La relation régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence d'une conduite en charge de forme donnée s'obtient en ayant recours à la relation de *Darcy-Weisbach* (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$\overline{J} = \frac{1}{128g}\frac{\overline{P}}{\overline{A}^3}\overline{Q}^2 \tag{31}$$

Compte tenu des relations (28) et (29), la relation (31) devient :

$$\overline{J} = \frac{1}{128g}\frac{3,26692049\,\overline{D}}{\left(0,82932333\,\overline{D}^2\right)^3}\overline{Q}^2$$

ou bien :

$$\overline{J}=0,04474628\left(\frac{\overline{Q}^2}{g\overline{D}^5}\right) \tag{32}$$

Introduisons le débit relatif :

$$\overline{Q}^*=\frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}\,\overline{D}^5}} \tag{33}$$

Tenant compte de (33), la relation (32) permet d'écrire que :

$$\overline{Q}^*=4,72739103=\text{constante} \tag{34}$$

A partir de la relation (32), nous pouvons également déduire que le diamètre $\overline{D}$ du modèle rugueux de référence s'écrit :

$$\overline{D}=0,53721903\left(\frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}}}\right)^{2/5} \tag{35}$$

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$, caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, est :

$$\overline{R}=\frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu} \tag{36}$$

En ayant recours à la relation (29), la relation (36) permet de déduire que $\overline{R}\left(\overline{Q},\overline{D}\right)$ s'écrit :

$$\overline{R}=\frac{1,22439466\,\overline{Q}}{\overline{D}\nu} \tag{37}$$

Mais, le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ peut aussi s'exprimer en fonction de $\overline{Q}$ et de $\overline{J}$ en combinant les relations (35) et (37). Il vient que :

$$\overline{R}=2,27913493\frac{\left(g\overline{J}\,\overline{Q}^3\right)^{1/5}}{\nu} \tag{38}$$

Exercice n° 1 :

On souhaite déterminer les dimensions linéaires D et y de la conduite en charge en forme de fer à cheval représentée par la figure 1. Utiliser pour cela la **MMR** en vous aidant des considérations théoriques ci-dessus exposées.

On donne :

$Q = 1,976\,m^3/s$; $J = 8.10^{-4}$; $\varepsilon = 0$; $\nu = 10^{-6}\,m^2/s$.

Solution

Résolvons le problème en admettant que le modèle rugueux de référence écoule le débit $\overline{Q} = Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$, du même liquide de viscosité cinématique ν .

Les données du problème sont alors telles que :

i. selon la relation (35), le diamètre du modèle rugueux de référence est :

$$\overline{D} = 0,53721903\left(\frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}}}\right)^{2/5} = 0,53721903\times\left(\frac{1,976}{\sqrt{9,81\times 8.10^{-4}}}\right)^{2/5} = 1,86000609\,m$$

ii. Le périmètre mouillé $\overline{P}$ est, en vertu de la relation (29) :

$$\overline{P} = 3,26692049\,\overline{D} = 3,26692049\times 1,86000609 = 6,07649199\,m$$

iii. Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est par suite :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu} = \frac{4Q}{\overline{P}\nu} = \frac{4\times 1,976}{6,07649199\times 10^{-6}} = 1300750,5$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ aurait pu également être calculé par application de la relation (37) ou (38), pour $\overline{Q} = Q$ et $\overline{J} = J$.

iv. Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la **MMR** (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$\psi = 1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_h}}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5} = 1,35\times\left[-\log\left(\frac{8,5}{1300750,5}\right)\right]^{-2/5} = 0,69894307$$

v. Le diamètre D recherché est :

$$D=\psi\overline{D}=0,69894307\times1,86000609=1,30003836\,m\cong1,3\,m$$

vi. Ainsi, la dimension linéaire y est, en vertu de la relation (12) :

$$y=0,08856217\,D=0,08856217\times1,30003836=0,11513422\,m\cong0,115\,m$$

vii. **Vérification des calculs**

a) ***Darcy-Weisbach***

Vérifions les calculs en déterminant, pour les dimensions linéaires calculées, le gradient J de la perte de charge linéaire selon la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$J=\frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} \tag{39}$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (19) :

$$A=0,82932333\,D^2=0,82932333\times1,30003836^2=1,40163914\,m^2$$

- Le diamètre hydraulique D_h est, conformément à la relation (27) :

$$D_h=1,01541906\,D=1,01541906\times1,30003836=1,32008373\,m$$

- Le coefficient de frottement f de la relation (39) est, selon la **MMR** :

$$f=\frac{\psi^5}{16}=\frac{0,69894307^5}{16}=0,01042531$$

Ainsi, selon la relation (39), le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J=\frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2}=\frac{0,01042531}{1,32008373}\times\frac{1,976^2}{2\times9,81\times1,40163914^2}=8.10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

b) ***Formule générale du débit volume***

Selon *Achour et Bedjaoui* (*Achour* and *Bedjaoui*, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q=-4\sqrt{2g}\,A\sqrt{R_hJ}\,\log\left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8}+\frac{10,04}{\overline{R}}\right) \tag{40}$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (40), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ s'exprime par :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \tag{41}$$

La relation (40) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = D_h / 4 = 1,32008373/4 = 0,33002093\,m$$

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est, selon la relation (41) :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{9,81\times 8.10^{-4}\times 0,33002093^3}}{10^{-6}} = 760075,445$$

Ainsi, le débit volume Q est, en vertu de la relation (40) :

$$Q = -4\times\sqrt{2\times 9,81}\times 1,40163914\times\sqrt{0,33002093\times 8.10^{-4}}\times\log\left(\frac{10,04}{760075,445}\right)$$
$$= 1,9688073\,m^3/s \cong 1,969\,m^3/s$$

Ainsi, le débit volume calculé selon la formule générale correspond, avec un écart relatif de moins de 0,37%, à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

c) ***Formule de Chézy***

Selon *Chézy*, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \tag{42}$$

où $C\left(m^{0,5}/s\right)$ est le coefficient de résistance de *Chézy*. Selon la **MMR**, celui-ci est donné par :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{43}$$

soit : $C = \dfrac{8\times\sqrt{2\times 9,81}}{0,69894307^{5/2}} = 86,7630855\,m^{0,5}/s \cong 87\,m^{0,5}/s$

Le débit volume Q serait donc, selon la relation (42) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} = 86,7630855\times 1,40163914\times\sqrt{0,33002093\times 8.10^{-4}} = 1,976\,m^3/s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.