Exercice n° 2

Soit la conduite en charge de forme ovoïdale ABCEFGA représentée par la figure ci-dessous.

a) Donner les détails du tracé de son profil

b) Donner les expressions de la section mouillée $A(D)$ et $A(Y)$ ainsi que celles du périmètre mouillé $P(D)$ et $P(Y)$.

c) Calculer les dimensions linéaires Y, D et d pour les données suivantes :

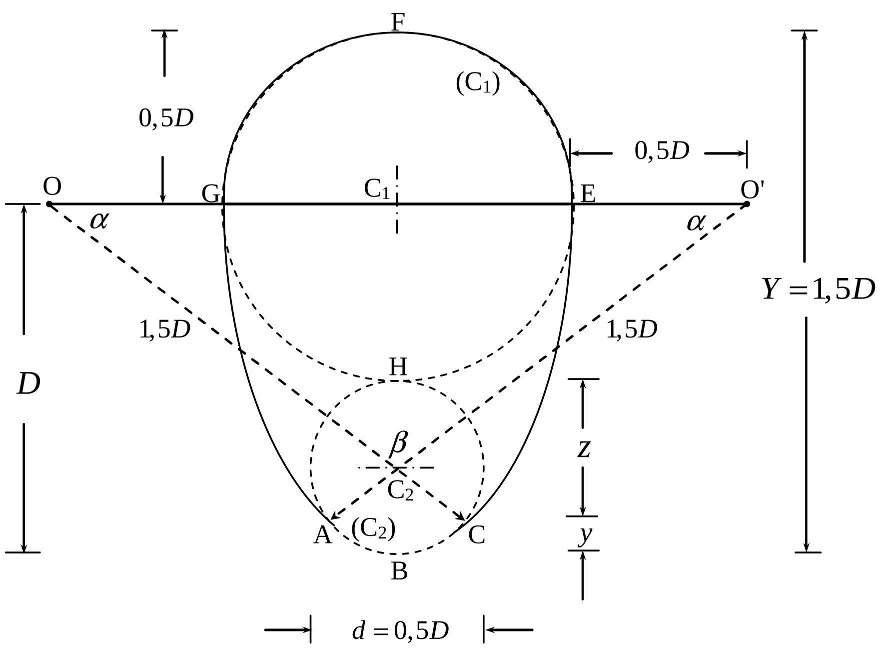
Débit volume $Q = 2,1 m^3/s$; Gradient de la perte de charge linéaire $J = 10^{-4}$; Rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite $\varepsilon = 10^{-3} m$; Viscosité cinématique du liquide en écoulement $\nu = 10^{-6} m^2/s$.

d) Vérifier les calculs en déterminant, pour les dimensions linéaires calculées à l'étape c) :

1) Le gradient de la perte de charge linéaire J selon *Darcy-Weisbach*.

2) Le débit volume Q par la formule générale.

3) Le débit volume Q par la formule de *Chézy*.



Solution

a) Le tracé du profil ovoïdal de la conduite considérée s'opère selon les étapes suivantes :

i. Tracer le cercle (C_1) de centre C_1, de diamètre $D = \overleftrightarrow{GE}$.

ii. Tracer le cercle (C_2) de centre C_2, de diamètre $d = 0,5D$, tangent à (C_1) au point H. Les centres C_1 et C_2 se situent sur la même verticale.

iii. Considérer deux points O et O' tels que $\overleftrightarrow{OE} = \overleftrightarrow{O'G} = 1,5D$.

iv. Tracer les arcs de cercle $\overset{\frown}{EC}$ et $\overset{\frown}{GA}$, respectivement de centre O et O' et de rayon $\overleftrightarrow{OC}$ et $\overleftrightarrow{O'A}$, tangents au cercle (C_2) aux points A et C.

D'autre part, la figure obtenue suggère les remarques suivantes :

i. En considérant le triangle $(\vartriangle O'C_1C_2)$, l'angle α est tel que :

$$tg(\alpha) = \frac{\overleftrightarrow{C_1C_2}}{\overleftrightarrow{C_1O'}} = \frac{\overleftrightarrow{C_1H} + \overleftrightarrow{HC_2}}{\overleftrightarrow{C_1O'}} = \frac{D/2 + D/4}{D} = 0,75$$

soit : $\alpha = 36,86989765^{\circ} \cong 36,87^{\circ}$, ou bien $\alpha = 0,643501109$ radian

ii. L'angle β est donc tel que : $\beta = (180 - 2\alpha) = (180 - 2 \times 36,86989765) = 106,2602047^{\circ}$,

soit : $\beta = 1,854590436$ radian

iii. La distance verticale z s'écrit :

$$z = \frac{d}{2} + \frac{d}{2}\cos(\beta/2) = \frac{d}{2}\left[1 + \cos(\beta/2)\right] = \frac{D}{4}\left[1 + \cos(\beta/2)\right]$$

soit : $z = \dfrac{d}{2} + \dfrac{d}{2}\cos(\beta/2) = \dfrac{D}{4}\left[1 + \cos(106,2602047/2)\right] = 0,4D$

iv. Par suite, la distance verticale y est :

$$y = d - z = 0,5D - 0,4D = 0,1D$$

v. En outre, nous pouvons écrire que :

$$tg(\beta/2) = \frac{\overleftrightarrow{AC}/2}{d-y} = \frac{\overleftrightarrow{AC}/2}{0,25D - 0,1D} = \frac{\overleftrightarrow{AC}}{0,3D}$$

soit : $\overleftrightarrow{AC} = 0,3tg(\beta/2)D = 0,3 \times tg(106,2602047/2) \times D = 0,4D$

b) Pour déterminer l'expression de l'aire de la section mouillée ainsi que celle du périmètre mouillé de la conduite, subdivisons celle-ci en quelques figures géométriques usuelles. Désignons par :

- A_o, l'aire de la section du demi-cercle GFE et telle que :

$$A_o = \frac{\pi D^2}{8} = 0,392699082D^2$$

- A_1, l'aire du trapèze $GACEG$, de grande base $\overleftrightarrow{EG} = D$, de petite base $\overleftrightarrow{AC} = 0,4D$ et de hauteur $(z + \overleftrightarrow{HC_1}) = 0,4D + 0,5D = 0,9D$. L'aire A_1 s'écrit alors :

$$A_1 = \frac{(D + 0,4D)}{2} 0,9D = 0,63D^2$$

- A_2, l'aire du segment circulaire $ABCA$ telle que, pour l'angle β exprimé en radians :

$$A_2 = \frac{d^2}{4}\left[\beta/2 - \cos(\beta/2)\sin(\beta/2)\right] = \frac{D^2}{16}\left[\beta/2 - \cos(\beta/2)\sin(\beta/2)\right]$$

soit :

$$A_2 = \frac{D^2}{16} \times \left[1,854590436/2 - \cos(1,854590436/2)\sin(1,854590436/2)\right]$$

ou bien :

$$A_2 = 0,027955951 D^2$$

- A_3, l'aire du segment circulaire de corde $\overleftrightarrow{GA}$, d'angle au centre α, appartenant au cercle de centre O' et de diamètre $3D$. Soit, pour l'angle α exprimé en radians :

$$A_3 = \frac{(3D)^2}{4}\left[\alpha/2 - \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\right]$$

soit :

$$A_3 = \frac{9 \times D^2}{4} \times \left[0,643501109/2 - \sin(0,643501109/2)\cos(0,643501109/2)\right]$$

ou bien :

$$A_3 = 0,048938748 D^2$$

Finalement, l'aire recherchée A de la conduite ovoïdale considérée est :

$$A = A_o + A_1 + A_2 + 2A_3$$

soit :

$$A = 0,392699082 D^2 + 0,63 D^2 + 0,027955951 D^2 + 2 \times 0,048938748 D^2$$

ou bien :

$$A(D) = 1,148532529 D^2 \qquad (1)$$

En considérant que la hauteur géométrique de la conduite ovoïdale est telle que $Y = 1,5D$, la relation (1) peut donc s'écrire :

$$A(Y) = \frac{1,148532529}{1,5^2} Y^2$$

soit :

$$A(Y) = 0,5104589 Y^2 \qquad (2)$$

Pour déterminer le périmètre mouillé P , considérons :

- P_o , la longueur de l'arc $\overset{\frown}{GFE}$, correspondant au demi-cercle de diamètre D , soit :

  $P_o = \pi D/2 = 1,57079633D$

- P_1 , la longueur de l'arc $\overset{\frown}{GA}$ appartenant au secteur circulaire $O'GAO'$, de centre O' , de diamètre $3D$ et de demi-angle au centre $\alpha/2$. Pour l'angle α exprimé en radians, P_1 est :

  $P_1 = 3D(\alpha/2) = 3\times D\times(0,643501109/2)$

  Soit :

  $P_1 = 0,96525166D$

- P_2 , longueur de l'arc $\overset{\frown}{ABC}$ appartenant au secteur circulaire $ABCC_2A$, de centre C_2 , de diamètre $d = 0,5D$ et de demi-angle au centre $\beta/2$. Pour l'angle β exprimé en radians, P_2 est :

  $P_2 = 0,5D(\beta/2) = 0,5\times D\times(1,854590436/2)$

  soit :

  $P_2 = 0,46364761D$

  Finalement, le périmètre P recherché est :

  $P = P_o + 2P_1 + P_2$

  soit :

  $P = 1,57079633\times D + 2\times 0,96525166\times D + 0,46364761\times D$

  ou bien :

  $$P(D) = 3,96494726D \qquad (3)$$

  En tenant compte du fait que $Y = 1,5D$, la relation (3) permet d'écrire que :

  $$P(Y) = \frac{3,96494726}{1,5}Y$$

  soit :

  $$P(Y) = 2,64329818Y \qquad (4)$$

c)

i. Pour déterminer les dimensions linéaires Y , D et d , faisons appel à la **MMR ou Méthode du Modèle Rugueux** (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*).

Appliquons au modèle rugueux la relation de *Darcy-Weisbach*, en admettant que le débit $\overline{Q}$ qu'il écoule est tel que $\overline{Q} = Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$. Ainsi :

$$J = \frac{1}{128g}\frac{\overline{P}}{\overline{A}^3}Q^2 \tag{5}$$

$\overline{A}$ et $\overline{P}$ désignent respectivement l'aire de la section mouillée et le périmètre mouillé du modèle rugueux. Ils sont respectivement donnés par les relations 2 et 4 en y remplaçant Y par $\overline{Y}$. Tenant compte de ces relations, la relation (5) s'écrit :

$$J = \frac{1}{128g}\frac{2,64329818\overline{Y}}{\left(0,5104589\overline{Y}^2\right)^3}Q^2 \tag{6}$$

En introduisant le débit relatif :

$$\overline{Q}^* = Q/\sqrt{gJ\overline{Y}^5} \tag{7}$$

la relation (6) permet aisément d'écrire que :

$$\overline{Q}^* = 2,53789166 \cong 2,538 = \text{Constante} \tag{8}$$

De la relation (7), nous pouvons déduire que la hauteur géométrique du modèle rugueux est :

$$\overline{Y} = \left(\frac{Q}{\overline{Q}^*\sqrt{gJ}}\right)^{2/5} = \left(\frac{Q}{2,53789166\sqrt{gJ}}\right)^{2/5} \tag{9}$$

Le diamètre hydraulique $\overline{D_h} = 4\overline{A}/\overline{P}$ du modèle rugueux s'écrit :

$$\overline{D_h} = 4\times 0,5104589\overline{Y}^2 / 2,64329818\overline{Y}$$

soit :

$$\overline{D_h} = 0,77245754\overline{Y} \tag{10}$$

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu} = \frac{4Q}{\overline{P}\nu}$$

soit :

$$\overline{R} = \frac{4Q}{2,64329818\overline{Y}\nu}$$

ou bien :

$$\overline{R}=1,51326098\frac{Q}{\overline{Y}\nu} \tag{11}$$

ii. Les données du problème sont telles que :

- $\overline{Y}=\left(\frac{Q}{2,53789166\sqrt{gJ}}\right)^{2/5}=\left(\frac{2,1}{2,53789166\times\sqrt{9,81\times10^{-4}}}\right)^{2/5}=3,70479929\,m$ (Eq.9)
- $\overline{D_h}=0,77245754\overline{Y}=0,77245754\times3,70479929=2,86180015\,m$ (Eq.10)
- $\overline{R}=1,51326098\frac{Q}{\overline{Y}\nu}=1,51326098\frac{2,1}{3,70479929\times10^{-6}}=857765,244$ (Eq.11)

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est :

$$\psi=1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_h}}{4,75}+\frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5} \tag{12}$$

soit :

$$\psi=1,35\times\left[-\log\left(\frac{10^{-3}/2,86180015}{4,75}+\frac{8,5}{857765,244}\right)\right]^{-2/5}=0,76937082$$

La relation (12) est applicable à l'ensemble du domaine turbulent (lisse, transition, turbulent rugueux), couvrant ainsi tout le domaine du diagramme de *Moody*. Son application s'étend également à toutes les formes usuelles de conduites en charge et même à surface libre.

iv. Les dimensions linéaires recherchées sont :

- $Y=\psi\overline{Y}=0,76937082\times3,70479929=2,85036448m\cong2,85m$
- $D=Y/1,5=2,85036448/1,5=1,90024299m\cong1,9m$
- $d=0,5D=0,5\times1,90024299=0,95012149m\cong0,95m$

d) Vérification des calculs

i. Selon *Darcy-Weisbach*, le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J=\frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} \tag{13}$$

Le coefficient de frottement f est, selon la **MMR** :

$$f = \frac{\psi^5}{16} \tag{14}$$

soit :

$$f = \frac{0,76937082^5}{16} = 0,0168484$$

Le diamètre hydraulique D_h s'écrit de manière identique à la relation (10), soit :

$$D_h = 0,77245754Y = 0,77245754 \times 2,85036448 = 2,20178553m$$

L'aire de la section $A(Y)$ est, selon la relation (2) :

$$A(Y) = 0,5104589Y^2 = 0,5104589 \times 2,85036448^2 = 4,14726299m^2$$

En application de la relation (13), le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,0168484}{2,20178553} \times \frac{2,1^2}{2 \times 9,81 \times 4,14726299^2} = 0,0001$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énonce de l'exemple d'application considéré.

ii. La formule générale du débit est, selon *Achour* et *Bedjaoui* (*Achour* and *Bedjaoui*, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g}A\sqrt{R_h J}\log\left(\frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\overline{R}}\right) \tag{15}$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (15), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est donné par :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \tag{16}$$

La relation (15) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody* (lisse, transition, turbulent rugueux).

Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = D_h / 4 = 2,20178553 / 4 = 0,55044638m$$

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est, selon la relation (16) :

$$\overline{R}=32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu}=32\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{9,81\times10^{-4}\times0,55044638^3}}{10^{-6}}=578857,965$$

Ainsi, le débit volume Q est en vertu de la relation (15) :

$$Q=-4\times\sqrt{2\times9,81}\times4,14726299\times\sqrt{0,55044638\times10^{-4}}\times$$
$$\log\left(\frac{0,001/0,55044638}{14,8}+\frac{10,04}{578857,965}\right)=2,10083848\,m^3/s\cong2,1\,m^3/s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

iii. Selon *Chézy*, le débit volume Q est :

$$Q=CA\sqrt{R_hJ} \qquad (17)$$

Le coefficient de résistance C de *Chézy* est selon la **MMR** :

$$C=\frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \qquad (18)$$

soit :

$$C=\frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}}=\frac{8\times\sqrt{2\times9,81}}{0,76937082^{5/2}}=68,2496153\,m^{0,5}/s$$

Ainsi, en vertu de la relation (17), le débit volume Q est :

$$Q=68,2496153\times4,14726299\times\sqrt{0,55044638\times10^{-4}}=2,1\,m^3/s$$

Nous retrouvons bien la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.