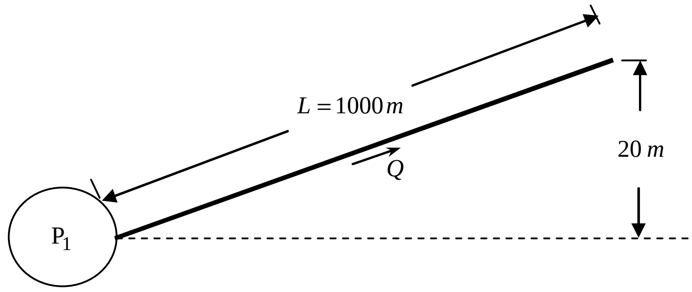
Exercice n° 2

La pression à la sortie de la station de pompage, schématisée par la figure ci-dessous, est $P_1 = 5\,bars$. De l'eau, de masse volumique $\rho = 10^3\,kg/m^3$, de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6}\,m^2/s$ et de débit volume $Q = 400\,m^3/heure$, doit être acheminée à travers une conduite circulaire rectiligne de diamètre interne D et de rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-4}\,m$, sur une longueur $L = 1000\,m$ et sur une hauteur de $20\,m$. L'accélération de la pesanteur est $g = 10\,m/s^2$.



Parmi les diamètres commerciaux ci-dessous indiqués, quel est le plus petit diamètre D pouvant répondre aux conditions du problème ?

Diamètres commerciaux (en millimètres)
60 – 80 – 100 – 125 – 150 – 200 – 250 – 300 – 350 – 400 – 450

Solution

i. En mètres de colonne d'eau (mCE), la pression P_1 est environ :

$$P_1 = 50\,mCE$$

ii. Ces 50 mCE doivent servir à vaincre les 20 mètres de hauteur d'élévation ainsi que les pertes de charges linéaires Δh. Celles-ci sont donc égales à :

$$\Delta h = 50 - 20 = 30\,mCE$$

iii. Le gradient de la perte de charge linéaire J est, par suite :

$$J = \frac{\Delta h}{L} = \frac{30}{1000} = 0,03$$

iv. Résolvons le problème par la **MMR** et considérons que le modèle rugueux de référence écoule le débit volume $\overline{Q} = Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$. Son diamètre interne $\overline{D}$ est alors donné par la relation (*Relation 13, Exercice n°1, fichier disponible au téléchargement*) :

$$\overline{D}=\left(2\pi^2\right)^{-1/5}\left(\frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}}}\right)^{2/5}=\left(2\pi^2\right)^{-1/5}\left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}}\right)^{2/5}=\left(2\times\pi^2\right)^{-1/5}\times\left[\frac{(400/3600)}{\sqrt{9,81\times0,03}}\right]^{2/5}$$

Soit :

$$\overline{D}=0,290946272\,m\cong0,291\,m$$

v. Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$, caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\overline{R}=\frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu}=\frac{4Q}{\overline{P}\nu}=\frac{4Q}{\pi\overline{D}\nu}=\frac{4\times(400/3600)}{\pi\times0,290946272\times10^{-6}}=486244,6233$$

vi. La rugosité relative $\varepsilon/\overline{D}$ est :

$$\varepsilon/\overline{D}=0,0001/0,290946272=0,00034371$$

vii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la **MMR** (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$\psi=1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D}}{4,75}+\frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5}=1,35\times\left[-\log\left(\frac{0,00034371}{4,75}+\frac{8,5}{486244,6233}\right)\right]^{-2/5}$$

Soit :

$$\psi=0,77179271$$

viii. Le diamètre recherché est par suite :

$$D=\psi\overline{D}=0,77179271\times0,290946272=0,22455021\,m$$

ix. Le diamètre D ainsi calculé ne figure pas dans le tableau des diamètres commerciaux, donné à l'énoncé. Il se situe entre les diamètres $200\,mm$ et $250\,mm$. Il faut donc considérer le diamètre qui lui est directement supérieur, soit :

$$D=250\,mm$$

Il s'agit donc du plus petit diamètre répondant aux conditions imposées par l'énoncé du problème.

x. **Vérification des calculs**

Cette étape vise à vérifier le calcul du diamètre interne D de la conduite. En tenant compte de ce diamètre calculé, il s'agit de vérifier que le gradient de la perte de charge linéaire J correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple considéré.

Selon la **MMR** (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*), le gradient de la perte de charge J peut être déterminé par application de la relation :

$$J = \frac{2Q^2}{g\pi^2 D^5}\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}+\frac{10,04}{\overline{R}}\right)\right]^{-2}$$

Dans cette relation, le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est lié au nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement dans la conduite considérée, par l'expression :

$$\overline{R} = 2R\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}+\frac{5,5}{R^{0,9}}\right)\right]^{-1}$$

Les relations ci-dessus indiquées couvrent l'ensemble du diagramme de *Moody* et sont donc applicables dans tout le domaine de l'écoulement turbulent (Lisse, Transition, Turbulent rugueux), correspondant au nombre de *Reynolds* $R > 2300$ et à la rugosité relative $0 \le \varepsilon / D \le 0,05$.

a) Le nombre de *Reynolds* R est :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4\times(400/3600)}{\pi\times 0,22455021\times 10^{-6}} = 630019,72$$

b) La rugosité relative ε / D est :

$$\varepsilon / D = 0,0001/0,22455021 = 0,00044533$$

c) Par suite, le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est :

$$\overline{R} = 2R\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}+\frac{5,5}{R^{0,9}}\right)\right]^{-1} = 2\times 630019,72\times\left[-\log\left(\frac{0,00044533}{3,7}+\frac{5,5}{630019,72^{0,9}}\right)\right]^{-1}$$

Soit :

$$\overline{R} = 330392,801$$

d) Le gradient de la perte de charge linéaire J serait donc égal à :

$$J = \frac{2Q^2}{g\pi^2 D^5}\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}+\frac{10,04}{\overline{R}}\right)\right]^{-2}$$
$$= \frac{2\times(400/3600)^2}{10\times\pi^2\times 0,22455021^5}\times\left[-\log\left(\frac{0,00044533}{3,7}+\frac{10,04}{330392,801}\right)\right]^{-2} = 0,03000228 \cong 0,03$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.